24. 10. 2007

Institut für Festkörpertheorie und -optik
Friedrich-Schiller-Universität Jena

Übungen zur Elektrodynamik, WS 2007/2008

Übungsserie 1

Mathematische Grundlagen

1.) Im folgenden seien $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, $\mathbf{B}(\mathbf{r})$, $\mathbf{C}(\mathbf{r})$, $\mathbf{D}(\mathbf{r}) \in \mathbb{R}^3$ beliebige Vektorfelder und $\lambda(\mathbf{r})$ eine beliebige ortsabhängige skalare Größe. Beweisen Sie folgende Identitäten!

(a) $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\,\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\,\mathbf{C}$

(b) $[\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})] = [\mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A})] = [\mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})]$

(c) $\mathrm{grad}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \mathrm{grad})\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \mathrm{grad})\mathbf{A} + \mathbf{A} \times \mathrm{rot}\,\mathbf{B} + \mathbf{B} \times \mathrm{rot}\,\mathbf{A}$

(d) $\mathrm{div}(\lambda \mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \lambda(\mathbf{B} \cdot \mathrm{rot}\,\mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \mathrm{rot}\,\mathbf{B}) + \mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathrm{grad}\,\lambda$

Hinweis: Nutzen Sie zweckmäßigerweise die Eigenschaften des in der Vorlesung eingeführten total antisymmetrischen ε-Tensors, um (a) und eventuell auch (b), (c) und (d) zu lösen! Beachten Sie die alternativen Schreibweisen der Differentialoperatoren mit Hilfe von $\boldsymbol{\nabla}$, des dreidimensionalen Nabla-Operators: $\mathrm{rot}\,\mathbf{A} \equiv \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}$, $\mathrm{div}\,\mathbf{A} \equiv \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A}$ und $\mathrm{grad}\,a \equiv \boldsymbol{\nabla} a$!

2.) Es seien $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ beliebige, sowohl quellen- als auch wirbelfreie Vektorfelder. Geben Sie die Quell- und die Wirbeldichte von $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ an!

3.)

(a) Verifizieren Sie den Gaußschen Satz für das Vektorfeld

$$\mathbf{A} = ax\mathbf{e}_x + by\mathbf{e}_y + cz\mathbf{e}_z$$

und die Kugel $\mathrm{K} \equiv \{\mathbf{r}\colon x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$!

(b) Verifizieren Sie den Stokesschen Satz für das Vektorfeld

$$\mathbf{A} = (4x/3 - 2y)\mathbf{e}_x + (3y - x)\mathbf{e}_y$$

und die Fläche $\mathrm{F} \equiv \{\mathbf{r}\colon (x/3)^2 + (y/2)^2 \leq R^2,\ z = 0\}$!

Abgabetermin: Freitag, 2. 11. 2007, vor der Vorlesung