15.04.2009

INSTITUT FÜR ANGEWANDTE PHYSIK
FRIEDRICH-SCHILLER-UNIVERSITÄT JENA

Übungen zur Elektrodynamik, SS 2009
Übungsserie 1
Mathematische Grundlagen

1. Im folgenden seien $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, $\mathbf{B}(\mathbf{r})$, $\mathbf{C}(\mathbf{r})$, $\mathbf{D}(\mathbf{r}) \in \mathbb{R}^3$ beliebige Vektorfelder und $\lambda(\mathbf{r})$ eine beliebige ortsabhängige skalare Größe. Beweisen Sie folgende Identitäten!
   (a) $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\,\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\,\mathbf{C}$
   (b) $[\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})] = [\mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A})] = [\mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})]$
   (c) $\mathrm{rot}\,(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \mathrm{grad})\,\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \mathrm{grad})\,\mathbf{B} + \mathbf{A}\,\mathrm{div}\,\mathbf{B} - \mathbf{B}\,\mathrm{div}\,\mathbf{A}$
   (d) $\mathrm{div}(\lambda\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \lambda(\mathbf{B} \cdot \mathrm{rot}\,\mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \mathrm{rot}\,\mathbf{B}) + \mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathrm{grad}\,\lambda$

   Hinweis: Nutzen Sie zweckmäßigerweise die Eigenschaften des in der Vorlesung eingeführten total antisymmetrischen ε-Tensors, um (a) und eventuell auch (b), (c) und (d) zu lösen! Beachten Sie die alternativen Schreibweisen der Differentialoperatoren mit Hilfe von $\boldsymbol{\nabla}$, des dreidimensionalen Nabla-Operators: $\mathrm{rot}\,\mathbf{A} \equiv \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}$, $\mathrm{div}\,\mathbf{A} \equiv \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A}$ und $\mathrm{grad}\,a \equiv \boldsymbol{\nabla}\,a$!

2. Berechnen Sie die Komponenten des Vektors

$$\Delta\mathbf{A} := \mathrm{grad}\ \mathrm{div}\,\mathbf{A} - \mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\,\mathbf{A}$$

   in kartesischen Koordinaten!

3. (a) Verifizieren Sie den Gaußschen Satz für das Vektorfeld

$$\mathbf{A} = ax\mathbf{e}_x + by\mathbf{e}_y + cz\mathbf{e}_z$$

   und die Kugel $\mathrm{K} \equiv \{\mathbf{r} \colon x^2 + y^2 + z^2 \le R^2\}$!

   (b) Verifizieren Sie den Stokesschen Satz für das Vektorfeld

$$\mathbf{A} = (4x/3 - 2y)\mathbf{e}_x + (3y - x)\mathbf{e}_y$$

   und die Fläche $\mathrm{F} \equiv \{\mathbf{r} \colon (x/3)^2 + (y/2)^2 \le R^2,\ z = 0\}$!

Abgabetermin: Mittwoch, 22. 04. 2009, vor der Vorlesung.