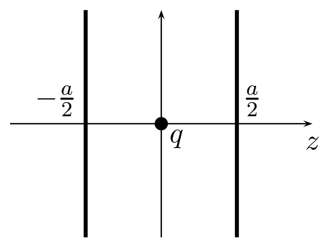
Nachklausur zur Elektrodynamik WS 06/07

(1) Bildladungen **3 P.**

Eine Punktladung q sitze im Ursprung zwischen zwei dünnen geerdeten Metallplatten, welche die Ebenen $z = \pm a/2$ ausfüllen. Das elektrostatische Potential im Innenraum $|z| \leq a/2$ kann mit Hilfe der Bildladungsmethode bestimmt werden. Skizzieren Sie dazu die Positionen der ersten vier Bildladungen, die dem Ursprung am nächsten sind. Wie lautet das exakte Potential?



(2) Multipolmomente **4 P.**

Zeigen Sie, daß die Entwicklung nach $R/r < 1$ des elektrostatischen Potentials einer Halbkugel mit Ladungsdichte $\varrho(\vec{r}) = \varrho_0\, \theta(R-r)\, \theta(\cos\vartheta)$ durch

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{r} + \frac{3q}{8}\frac{R}{r^2}\cos\vartheta + O(R^3/r^4)$$

gegeben ist. (Den Quadrupolbeitrag berechnet man am schnellsten über die Multipolkoeffizienten $q_{\ell m}$. Alternativ können Sie den Quadrupoltensor in der Form $Q = \int d^3r\, \varrho(\vec{r})\, (\vec{r}\,\vec{r}^{\,t} - \frac{1}{3}r^2\,\mathbb{1})$ verwenden.)

(3) Magnetostatik (Diplom) **3 P.**

Zeigen Sie, daß das Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{2}r^2\,\vec{r}\times\vec{m}$ mit konstantem Vektor $\vec{m}$ die Coulomb-Eichung erfüllt und daß das zugehörige Magnetfeld durch $\vec{B}(\vec{r}) = (\vec{m}\cdot\vec{r})\vec{r} - 2r^2\vec{m}$ gegeben ist. Von welcher Stromdichte $\vec{\jmath}(\vec{r})$ wird dieses erzeugt?

(3) Geladener Luftballon (Lehramt) **3 P.**

Es seien die elektromagnetischen Felder

$$\vec{E}(t,\vec{r}) = -q\,\theta(vt-r)\,\frac{\vec{r}}{r^3}\ , \quad \vec{B}(t,\vec{r}) = 0$$

gegeben. Für welche Ladungs- und Stromdichte sind alle Maxwellgleichungen erfüllt? Welche Situation wird hier beschrieben?

(4) Rotierender geladener Zylinder (Diplom) **4 P.**

Ein homogen geladener Zylindermantel mit Radius R und Höhe h rotiere mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um seine Achse:

$$\vec{\jmath}(\vec{r}) = nI\,\delta(\rho - R)\,\theta(h/2 - |z|)\,\vec{e}_\varphi\ .$$

Bestimmen Sie das erzeugte Magnetfeld auf der Rotationsachse. Wie lautet es speziell im Ursprung? Bilden Sie dort zur Kontrolle den Limes $h \to \infty$, welcher das bekannte Magnetfeld im Innern einer unendlich langen Spule liefern sollte. (Es ist $\partial_x\big[x(x^2+a^2)^{-1/2}\big] = a^2(x^2+a^2)^{-3/2}$.)

(4) Faradaysches Induktionsgesetz (Lehramt) **4 P.**

Die (unendlich dünne) Felge eines Rades mit Radius R_2 sei gleichmäßig mit Ladung belegt: $\varrho(\vec{r}) = \lambda\,\delta(\rho - R_2)\,\delta(z)$. Innerhalb eines kreisförmigen Bereichs mit Radius $R_1 < R_2$ um die Radachse sei ein homogenes Magnetfeld vorhanden, das parallel zu dieser ausgerichtet ist. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird es ausgeschaltet: $\vec{B}(t, \vec{r}) = B_0\,\theta(-t)\,\theta(R_1 - \rho)\,\vec{e}_z$. Skizzieren Sie die Situation und beschreiben Sie in Worten, was passiert. (Gleichungen sind natürlich auch erlaubt.)

(5) Diffusionsgleichung **3 P.**

Es ist die allgemeine Lösung $f(t, x)$ der eindimensionalen Diffusionsgleichung

$$\partial_t f(t, x) = \lambda\,\partial_x^2\,f(t, x)$$

mit konstantem $\lambda > 0$ gesucht. Führen Sie dazu eine räumliche Fourier-Transformation durch, lösen Sie die DGL für $\tilde{f}(t, k)$, und bringen Sie nach Rücktransformation das Resultat in die Form eines Faltungsintegrals

$$f(t, x) = \int dy\,K(t, x - y)\,f(0, y)$$

mit zu bestimmendem Kern $K(t, x)$. Skizzieren Sie zur Startkonfiguration $f(0, x) = \delta(x - a)$ die Funktion $f(t, x)$ für zwei Zeiten $0 < t_1 < t_2$. (Zur Erinnerung: $\int dk\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx - \alpha k^2} = \sqrt{\pi/\alpha}\,\mathrm{e}^{-x^2/4\alpha}$.)

(6) Interferenz **2 P.**

In den Übungen wurde gezeigt, daß ein Plattensender mit Stromdichte $\vec{\jmath} \sim \cos(\omega t)\delta(x)\,\vec{e}_z$ ein elektrisches Feld $\vec{E} = E_0\big[\theta(x)\cos(kx - \omega t) + \theta(-x)\cos(kx + \omega t)\big]\,\vec{e}_z$ mit $\omega = ck$ erzeugt. Betrachten Sie jetzt zwei sich gegenüberstehende Plattensender: $\vec{\jmath} \sim \cos(\omega t)\,\big[\delta(x - a) + \delta(x + a)\big]\,\vec{e}_z$. Wellen abgestrahlt vom einen Sender mögen den anderen ungestört durchdringen. Für welche Werte von a bleibt der Raumbereich $x > a$ völlig Feld-frei? (Nicht unbedingt nötig: $2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$.)

(7) Eine Lorentz-Invariante **3 P.**

Überprüfen Sie die Invarianz von $-\frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \vec{E}^2 - \vec{B}^2$ unter allgemeinen Lorentz-Boosts durch Benutzung der Transformationsgleichungen für $\vec{E}$ und $\vec{B}$.

(8) Strahlung einer Stabantenne (Diplom) **4 P.**

Betrachten Sie eine Antenne in Form eines geraden dünnen Stabes der Länge L, der von der Stromdichte

$$\vec{\jmath}(t, \vec{r}) = I\sin(\omega t)\sin(kz)\,\delta(x)\,\delta(y)\,\theta(z)\,\theta(L - z)\,\vec{e}_z\ , \quad \omega = ck$$

durchflossen wird. Bestimmen Sie das retardierte Vektorpotential in der Fernzone

$$\vec{A}(t, \vec{r}) \simeq \frac{1}{cr}\int d^3r'\ \vec{\jmath}(ct - r + \vec{e}_r \cdot \vec{r}\,', \vec{r}\,')$$

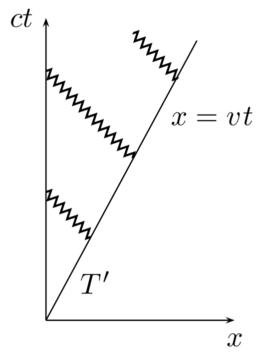
in der xy-Ebene. Wie lautet dort das Magnetfeld in derselben Fernzonennäherung? Für welche Stablängen L ist der zeitliche Mittelwert $\langle\vec{B}^2\rangle$ maximal?

(8) Dopplereffekt (Lehramt) **4 P.**

Ein Raumschiff bewegt sich mit der konstanten Geschwindigkeit v von der Erde fort und beginnt nach der Eigenzeit T', mit der Frequenz $f' = 1/T'$ Lichtblitze (beliebiger Wellenlänge) auszusenden. Zeigen Sie, daß diese mit der Frequenz

$$f = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}\, f'$$

auf der Erde eintreffen. Wie lautet diese Beziehung im nichtrelativistischen Limes $v \ll c$?



Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!