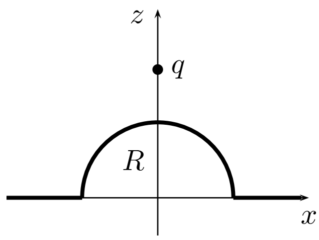
Klausur zur Elektrodynamik WS 06/07

(1) Elektrostatik **4 P.**

Leiten Sie die bekannte Lösung der elektrostatischen Maxwell-Gleichungen $\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = 4\pi\varrho(\vec{r})$ und $\nabla \times \vec{E}(\vec{r}) = 0$ durch Fourier-Transformation her.

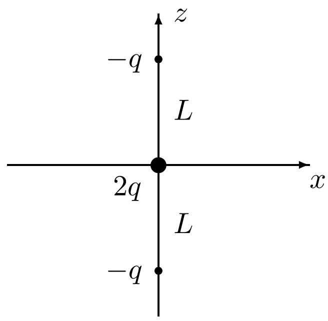
(2) Bildladungen **3 P.**

Ein Leiter auf Potential $\phi = 0$ fülle die xy-Ebene aus bis auf eine halbkugelförmige Ausbuchtung mit Radius R um den Ursprung. Eine Punktladung q befinde sich über der Halbkugel bei $\vec{r} = \alpha R\,\vec{e}_z$ mit $\alpha > 1$. Welche Kraft wird auf die Ladung ausgeübt? (Zur Erinnerung: Eine geerdete Kugel mit Radius R in Gegenwart einer Punktladung q im Abstand d vom Kugelmittelpunkt kann durch eine Bildladung $-(R/d)q$ im Abstand R^2/d ersetzt werden.)



(3) Multipolmomente **2 P.**

Bestimmen Sie das elektrische Monopol-, Dipol- und Quadrupolmoment bezüglich des Schwerpunkts der skizzierten Anordnung von Punktladungen und geben Sie das elektrostatische Potential $\phi(\vec{r})$ in dieser Entwicklung nach $L/r < 1$ an.



(4) Elektrostatik in Materie **2 P.**

Erklären Sie, weshalb die Gleichung $\nabla \cdot \vec{D} = 4\pi\varrho_f$ im allgemeinen *nicht* durch den Ausdruck $\vec{D}(\vec{r}) = \int d^3r'\,\varrho_f(\vec{r}\,')\,\dfrac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$ gelöst wird.

(5) Dirichlet-Randwertproblem (Diplom) **5 P.**

Eine Metallplatte auf konstantem Potential $\phi = \phi_0$ fülle die Halbebene $x = 0$, $y > 0$ aus, eine weitere Platte auf Potential $\phi = 0$ die Halbebene $x = 0$, $y < 0$. Es soll das elektrische Feld im Halbraum $x \geq 0$ bestimmt werden.
Anschaulich ist klar, wie die Feldlinien verlaufen. Skizzieren Sie diese und auch die Schnitte der Äquipotentialflächen mit der xy-Ebene. Das Potential in Zylinderkoordinaten können Sie danach direkt hinschreiben. Aus diesem berechnen Sie dann $\vec{E}(\vec{r})$.
Jetzt soll das Problem nochmals mit der Methode der Greenschen Funktionen gelöst werden. Dazu verschaffen Sie sich die Greensche Funktion $G_D(\vec{r},\vec{r}\,')$ des Laplace-Operators, welche auf den beiden Metallplatten verschwindet, mit Hilfe der Bildladungsmethode. (Nützliche Notation: $x_\pm = x \pm x'$ etc.) Mit dieser Funktion können Sie dann das Potential aus der allgemeinen Formel für Dirichlet-Randwertprobleme berechnen:

$$\phi(\vec{r}) = \int_V d^3r'\,G_D(\vec{r},\vec{r}\,')\,\varrho(\vec{r}\,') - \frac{1}{4\pi}\int_{\partial V} d\vec{f}\,' \cdot \nabla' G_D(\vec{r},\vec{r}\,')\,\phi(\vec{r}\,')\ .$$

(5a) Magnetostatik (Lehramt) **2 P.**

Es sei ein Magnetfeld der Form $\vec{B}(\vec{r}) = f(\varrho)\,\vec{e}_z$ mit $\varrho^2 = x^2 + y^2$ gegeben. Welche Stromdichte $\vec{\jmath}(\vec{r})$ ist erforderlich? Bestimmen und skizzieren Sie $\vec{\jmath}(\vec{r})$ für den Fall $f(\varrho) = B_0\,\theta(R_2 - \varrho)\,\theta(\varrho - R_1)$ mit $R_2 > R_1 > 0$.

(5b) Felderzeugung (Lehramt) **3 P.**

Das elektrische Feld $\vec{E}(t, \vec{r}) = \alpha\,\mathrm{e}^{-t/\beta}(xz, yz, -x^2 - y^2)$ soll (in einem begrenzten Raumbereich) hergestellt werden. Welche Ladungen und Ströme sind dafür erforderlich? Ist die Kontinuitätsgleichung erfüllt?

(6) Zylinderkabel **3 P.**

Ein unendlich langes zylindrisches Kabel mit Radius R_2 habe einen ebenfalls zylindrischen koaxialen Hohlraum mit Radius $R_1 < R_2$. Der Leiter werde von einer Stromdichte $\vec{\jmath}(\vec{r}) = \alpha\varrho\,\theta(R_2 - \varrho)\,\theta(\varrho - R_1)\,\vec{e}_z$ durchflossen. Wie lautet das Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r})$ in den drei Raumbereichen $\varrho \leq R_1$, $R_1 \leq \varrho \leq R_2$ und $R_2 \leq \varrho$ ausgedrückt durch den Gesamtstrom I? Berechnen Sie zur Kontrolle $\nabla \times \vec{B}$ im Leiter.

(7) Rotierende geladene Ringe **3 P.**

Gegeben seien zwei unendlich dünne konzentrische Ringe in der xy-Ebene mit Radien $R_2 > R_1 > 0$. Auf dem inneren Ring möge sich gleichmäßig verteilt die Ladung q, auf dem äußeren die Ladung $-q$ befinden. Nun lassen Sie die ganze Anordnung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um die Symmetrieachse rotieren. Bestimmen Sie das magnetische Moment $\vec{m}$ der Anordnung bezüglich ihres Mittelpunkts.

(8) Plattensender **3 P.**

Es soll das von der Stromdichte $\vec{\jmath}(t, \vec{r}) = (cB_0/2\pi)\,\delta(x)\sin(\omega t)\,\vec{e}_z$ erzeugte Magnetfeld $\vec{B}(t, \vec{r})$ bestimmt werden. Lösen Sie dazu die inhomogene Wellengleichung für das Vektorpotential durch einen Ansatz, der eine im rechten Halbraum ($x > 0$) nach rechts und eine im linken Halbraum ($x < 0$) nach links propagierende ebene Welle beschreibt.

(9) Faradaysches Induktionsgesetz **3 P.**

Die homogene Maxwell-Gleichung $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ gilt in allen Inertialsystemen. Leiten Sie aus dieser durch einen Lorentz-Boost das Faradaysche Induktionsgesetz her. (Es reicht, einen Boost in x-Richtung zu betrachten.)

(10) Stromdurchflossener Draht (Diplom) **4 P.**

In einem unendlich langen und dünnen geraden Leiter werde zum Zeitpunkt $t = 0$ überall gleichzeitig der konstante Strom I_0 eingeschaltet: $\vec{\jmath}(t, \vec{r}) = I_0\,\theta(t)\,\delta(x)\,\delta(y)\,\vec{e}_z$. Zeigen Sie, daß das (exakte) retardierte Vektorpotential durch

$$\vec{A}(t, \vec{r}) = \frac{2I_0}{c}\,\theta(ct - \varrho)\,\mathrm{arcsinh}\Big(\sqrt{(ct/\varrho)^2 - 1}\,\Big)\,\vec{e}_z$$

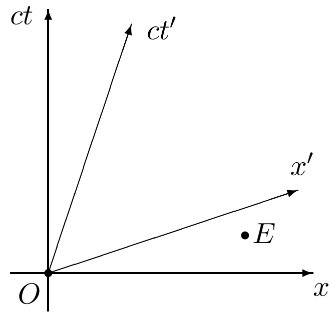
gegeben ist (überlegen Sie sich, wie die Stufenfunktion die Integration einschränkt) und bestimmen Sie daraus das Magnetfeld $\vec{B}(t, \vec{r})$. Erhalten Sie im Grenzfall $ct \gg \varrho$ das Ihnen bekannte Feld eines langen dünnen Drahts?

(10) Längenkontraktion (Lehramt) **4 P.**

Eine in einem Inertialsystem I ruhende Ladungsverteilung hat eine Ladungsdichte $\varrho(x)$, aber keine Stromdichte. Welche Ladungsdichte $\varrho'(x')$ sieht ein relativ zu I geradlinig gleichförmig bewegter Beobachter? Erklären Sie in Worten, wie das Resultat zu verstehen ist.

(11) Kausalität **2 P.**

Für einen Beobachter im Inertialsystem I findet das Ereignis E später statt als O, wohingegen es einem Beobachter in I' früher als O erscheint. Weshalb steht diese Relativität der zeitlichen Reihenfolge nicht in Konflikt mit der Kausalität, wonach die Ursache stets der Wirkung vorangeht?



Nützliche Formeln:

$$\int_0^\infty dx\,\frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2}\,, \qquad \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2}$$

$$\partial_x \arctan(x/a) = \frac{a}{x^2+a^2}\,, \qquad \partial_x \operatorname{arcsinh}(x/a) = \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!