Elektrodynamik
FSU Jena - WS 1999-2000
Klausur - Lösungen

Stilianos Louca

19. Februar 2008

Aufgabe 01

Wegen $\operatorname{rot}\vec{B}=0$ können wir das Vektorpotential $\vec{A}$ einführen:

$$\vec{B}=\operatorname{rot}\vec{A} \;\leftrightarrow\; \operatorname{div}\vec{B}=\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{A}=0$$

Eingesetzt in die zweite Maxwellgleichung $\operatorname{rot}\vec{E}=-\dot{\vec{B}}$ ergibt

$$\operatorname{rot}\left[\vec{E}+\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}\right]=0$$

so dass wir auch hier ein skalares Potential Φ einführen können:

$$\vec{E}+\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}=-\operatorname{grad}\Phi \;\leftrightarrow\; \operatorname{rot}\left[\vec{E}+\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}\right]=-\operatorname{rot}\operatorname{grad}\Phi=0$$

Durch die Einführung der beiden Potentiale sind also automatisch die beiden homogenen Maxwellgleichungen erfüllt. Gehen jetzt damit in die inhomogenen Maxwellgleichungen ein:

$$\operatorname{div}\vec{E}=-\operatorname{div}\operatorname{grad}\Phi-\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\vec{A}=\frac{\rho}{\varepsilon_0} \;\rightarrow\; \Delta\Phi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}-\frac{\partial}{\partial t}\left[\operatorname{div}\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\Phi\right]$$

$$\operatorname{rot}\vec{B}=\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A}-\Delta\vec{A}=\mu_0\vec{j}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}=\mu_0\vec{j}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{grad}\Phi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A}$$

$$\rightarrow\; \Delta\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A}=-\mu_0\vec{j}+\operatorname{grad}\left[\operatorname{div}\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\Phi\right]$$

Durch die Lorentz-Eichung

$$\operatorname{div}\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\Phi=0$$

erhält man die Wellengleichungen

$$\Delta\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A}=-\mu_0\vec{j} \quad,\quad \Delta\Phi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Umgekehrt, sind deren Lösungen verträglich mit der Lorentz-Eichung

$$\operatorname{div}\Delta\vec{A}-\operatorname{div}\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\Delta\Phi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi=\Delta\left[\operatorname{div}\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\Phi\right]-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\operatorname{div}\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\Phi\right]$$

$$=\Box\left[\operatorname{div}\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\Phi\right]=-\mu_0\operatorname{div}\vec{j}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\rho}{\varepsilon_0}=-\mu_0\left[\operatorname{div}\vec{j}+\dot{\rho}\right]=0$$

Aufgabe 02

Beginnen mit der Definition des Poyntingvektors $\vec{S} := \vec{E} \times \vec{H}$ und bekommen

$$\operatorname{div} \vec{S} = \vec{H} \cdot \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \cdot \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{H} \cdot \dot{\vec{B}} - \vec{E} \cdot \left[\vec{j} + \dot{\vec{D}} \right] = -\frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \dot{\vec{B}} - \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \dot{\vec{E}} - \vec{j} \cdot \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\left[\frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 + \frac{\varepsilon_0}{2} \vec{E}^2 \right]}_{w_e} - \vec{j} \cdot \vec{E}$$

Für ein beliebiges Volumen V also

$$\frac{\partial}{\partial t} W_e + P_m = \frac{\partial}{\partial t} \int_V w_e \, dV + \int_V \vec{j} \cdot \vec{E} \, dV = -\int_V \operatorname{div} \vec{S} \, dV = -\int_{\partial V} \vec{S} \, d\vec{A}$$

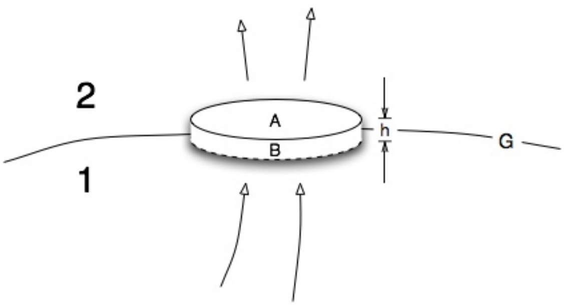
mit der vom Feld errichteten mechanischen Leistung P_m (Änderung der kinetischen Energie des Systems) und der gesamten Energie des Feldes W_e.

Aufgabe 03

Allgemein gilt

$$\operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(\vec{r}, t) \quad , \quad \operatorname{div} \vec{D}(\vec{r}, t) = \rho_e(\vec{r}, t)$$

Betrachten folgende Grenzschicht G zwischen zwei Medien mit den Dielektrizitätskonstanten ε_1 und ε_2.



In den beiden Medien herrschen jeweils die Felder $\vec{E}_1, \vec{D}_1 = \varepsilon_1 \varepsilon_0 \vec{E}_1, \; \vec{E}_2, \vec{D}_2 = \varepsilon_2 \varepsilon_0 \vec{E}_2$. Der Normalenvektor (in Richtung 2) sei $\vec{n}$. Betrachten das oben Illustrierte, zylinderförmige Volumen V und den 3 Randflächen A_1, A_2, B. Es gilt:

$$\int_V \rho_e(\vec{r}) \, dV = \int_V \operatorname{div} \vec{D} = \int_{\partial V} \vec{D} \, d\vec{A} = -\int_A D_1^n dA + \int_A D_2^n dA + \int_B \vec{D} \, d\vec{A}$$

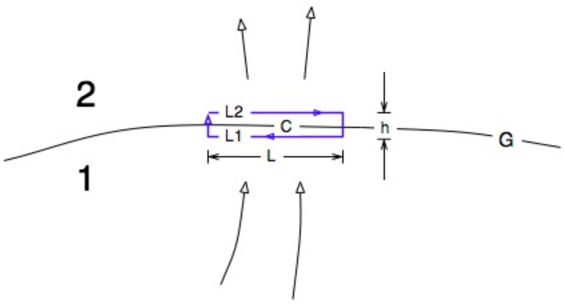
Lässt man $h \to 0$ gehen, so erhält man

$$\eta_e(\vec{r}) = \frac{d}{dA} \lim_{h \to 0} \int_V \rho_e(\vec{r}) \, dV = \frac{d}{dA} \left\{ -\int_A D_1^n dA + \int_A D_2^n dA \right\} = D_2^n - D_1^n$$

wobei η_e die Flächenladungsdichte auf der Grenzfläche ist. Für $\eta_e = 0$ ist somit $D_2^n = D_1^n$, d.h die Normalkomponente von D ist stetig. Somit gilt für die Normalkomponente von $\vec{E}$:

$$\varepsilon_1 E_1^n = \varepsilon_2 E_2^n$$

Betrachten jetzt unten illustrierten, die Fläche C umschließenden, Integrationsweg (Blau)



In diesem Kontext gilt

$$\int\limits_{L_1} \left(E_2^t - E_1^t\right)\ dl = \int\limits_{L_2} E_2^t\ dl - \int\limits_{L_1} E_1^t\ dl = \lim_{h\to 0} \int\limits_{\partial C} \vec{E}\ d\vec{s} = \lim_{h\to 0} \int\limits_{C} \operatorname{rot} \vec{E}\ d\vec{A} = -\lim_{h\to 0} \int\limits_{C} \dot{\vec{B}}\ d\vec{A} = 0$$

Durch Ableiten

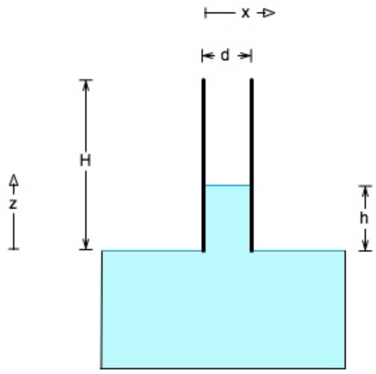
$$E_2^t - E_1^t = \frac{d}{dl} \int\limits_{L_1} \left(E_2^t - E_1^t\right)\ dl = \frac{d}{dl} 0 = 0$$

ergibt sich dass die Tangentialkomponente von $\vec{E}$ stetig sein muss. Somit folgt für die Tangentialkomponente von $\vec{D}$:

$$\frac{D_1^t}{\varepsilon_1} = \frac{D_2^t}{\varepsilon_2}$$

Aufgabe 04

Betrachten einen Plattenkondensator der Höhe H, Breite b und dem Plattenabstand d. Das Dielektrikum habe die relative Dielektrizitätskonstante ε und sei bis zur Höhe h in den Kondensator angestiegen.



Das Feld innerhalb der Platten kann im jeweiligen Material (Vakuum & Dielektrikum) also homogen, senkrecht zu den Platten gerichtet, betrachtet werden. Aufgrund der Stetigkeit der Tangentialkomponente von $\vec{E}$ an der Grenzfläche Dielektrikum/Vakuum sind die beiden $\vec{E}$-Felder in beiden Medien gleich, und gegeben durch

$$\int\limits_0^d \vec{E} \cdot \vec{e}_x\ dx = E \int\limits_0^d\ dx = U \ \rightarrow\ E = \frac{U}{d}$$

wobei U der Spannungsunterschied an den Platten ist. Somit ergibt sich im Dielektrikum V_d bzw. Vakuum V_v ein $\vec{D}$-Feld:

$$\vec{D}_v = \varepsilon_0 \frac{U}{d} \vec{e}_x\ ,\ \vec{D}_d = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{U}{d} \vec{e}_x$$

Der Maxwellsche Spannungstensor, allgemein gegeben durch

$$T^i_j = E^i D_j - \delta^i_j \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E}$$

ergibt sich in unserem Spezialfall als

$$\text{Vakuum:}\ T = \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon_0}{2}\frac{U^2}{d^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\varepsilon_0}{2}\frac{U^2}{d^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\varepsilon_0}{2}\frac{U^2}{d^2} \end{pmatrix} \qquad \text{Dielektrikum:}\ T = \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2}\frac{U^2}{d^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2}\frac{U^2}{d^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2}\frac{U^2}{d^2} \end{pmatrix}$$

Die Kraft auf das Dielektrikum ist gegeben durch

$$\vec{F} = \int\limits_{\partial V} T \cdot d\vec{A} = \int\limits_{\partial V} T^i_j dA^j \vec{e}_i$$

wobei

$$V := \left\{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 : x \in (0,d)\ ,\ y \in [0,b]\ ,\ z \in [0,H]\right\}$$

ein das Dielektrikum umschließendes Volumen ist. Somit ist

$$\vec{F} = \underbrace{\int\limits_0^H \int\limits_0^b T(x=d) \cdot \vec{e}_x\ dy\ dz - \int\limits_0^H \int\limits_0^b T(x=0) \cdot \vec{e}_x\ dy\ dz}_{0} + \underbrace{\int\limits_0^H \int\limits_0^d T(y=b) \cdot \vec{e}_y\ dx\ dz - \int\limits_0^H \int\limits_0^d T(y=0) \cdot \vec{e}_y ddx\ dz}_{0}$$

$$+ \int\limits_0^d \int\limits_0^b T(y=H) \cdot \vec{e}_z\ dx\ dy - \int\limits_0^d \int\limits_0^b T(y=0) \cdot \vec{e}_z\ dx\ dy = -\frac{\varepsilon_0}{2}\frac{U^2}{d^2} \int\limits_0^d \int\limits_0^b \vec{e}_z\ dx\ dy + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{2}\frac{U^2}{d^2} \int\limits_0^d \int\limits_0^b \vec{e}_z\ dx\ dy$$

$$= \frac{\varepsilon_0 U^2 b}{2d}(\varepsilon_r - 1) \cdot \vec{e}_z$$

Aufgabe 05

Verwenden Zylinderkoordinaten (r, φ, z) und setzen die Symmetrieachse des Zylinders auf die z-Achse. Aufgrund von Symmetriegründen sind die Komponenten B_r, B_φ, B_z von $\vec{B}$ unabhängig von der z und φ Koordinate, d.h

$$\vec{B}(\vec{r}) = B_r(r)\vec{e}_\rho + B_\varphi(r)\vec{e}_\varphi + B_z(r)\vec{e}_z$$

Durch das Biot-Savartsche Gesetz

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int\limits_v \frac{\vec{j}(\vec{r}\,') \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}\ dV'$$

ist ersichtlich dass im Falle $\vec{j} \parallel \vec{e}_z$ das Magnetfeld $\vec{B} \perp \vec{e}_z$ steht, da $\vec{e}_z \perp \vec{e}_z \times \vec{s}$ für beliebige Vektoren $\vec{s}$ ist. Somit ist $B_z = 0$. Betrachten jetzt die symmetrisch um die z-Achse liegende Zylinderfläche $\mathcal{Z}$ mit dem Radius R, der Höhe H, der Mantelfläche $\mathcal{M}$ und der Grundflächen $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$. Wegen div $\vec{B}$ ist

$$0 = \int\limits_{\mathcal{Z}} \operatorname{div} \vec{B}\ dV = \int\limits_{\partial\mathcal{Z}} \vec{B}\ d\vec{A} = \int\limits_{\mathcal{M}} B_r(R)\ dA + \int\limits_{\mathcal{A}_1} B_z(\vec{r})\ dA - \int\limits_{\mathcal{A}_2} B_z(\vec{r})\ dA = B_r(R)\,|\mathcal{M}|\ \rightarrow\ B_r = 0$$

Somit ist

$$\vec{B}(\vec{r}) = B(r)\vec{e}_\varphi$$

und wir können das Ampersche Gesetz anwenden, gemäß

$$2\pi R B(R) = \int\limits_{r=R} B(r) r\ d\varphi = \int\limits_{r=R} \vec{B}(\vec{r})\ d\vec{r} = \int\limits_{r<R} \operatorname{rot} \vec{B}(\vec{r})\ d\vec{A} = \int\limits_{r<R} \mu_0 \vec{j}(\vec{r})\ d\vec{A} = \mu_0 I_R\ \rightarrow\ B(r) = \frac{\mu_0 I_r}{2\pi r}$$

wobei I_r der durch die symmetrisch um die z-Achse liegende Kreisfläche mit dem Radius r fließende Strom ist. Es gilt:

$$I_r = \begin{cases} 0 & : r < R_1 \\ j_0 \pi \left(r^2 - R_1^2\right) & : r \in [R_1, R_2] \\ j_0 \pi \left(R_2^2 - R_1^2\right) & : r > R_2 \end{cases}$$

wobei j_0 die konstante Stromdichte ist. Somit ist

$$\vec{B}(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & : r < R_1 \\ \dfrac{\mu_0 j_0}{2r}\left(r^2 - R_1^2\right)\vec{e}_\varphi & : r \in [R_1, R_2] \\ \dfrac{\mu_0 j_0}{2r}\left(R_2^2 - R_1^2\right)\vec{e}_\varphi & : r > R_2 \end{cases}$$

Aufgabe 06

Beginnen mit der Faltungsdarstellung des Vektorpotentials in der Magnetostatik

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, dV'$$

seiner Definition

$$\vec{B}(\vec{r}) = \operatorname{rot}\vec{A}(\vec{r})$$

und bekommen durch

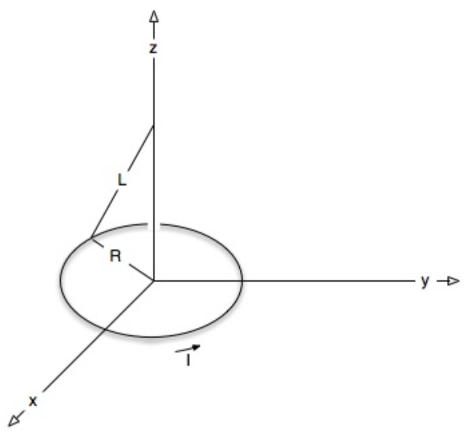
$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\operatorname{rot}_{\vec{r}}\int\limits_V \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, dV' = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V \operatorname{rot}_{\vec{r}}\left\{\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right\} dV' = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V \left\{\left[\operatorname{grad}_{\vec{r}}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right]\times\vec{j}(\vec{r}\,') + \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\underbrace{\operatorname{rot}_{\vec{r}}\vec{j}(\vec{r}\,')}_{0}\right\} dV'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V -\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\times\vec{j}(\vec{r}\,')\, dV' = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')\times(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\, dV'$$

genau das Biot-Savartsche Gesetz. Für einen Stromdurchflossenen dünnen Leiter S insbesondere

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int\limits_S \frac{d\vec{s}\times(\vec{r}-\vec{s})}{|\vec{r}-\vec{s}|^3}$$

Betrachten jetzt einen Kreisstrom der Intensität I auf der XY-Ebene mit dem Radius R, und verwenden Zylinderkoordinaten (r, φ, z).



Das Magnetfeld ergibt sich in einem beliebigen Punkt auf der z-Achse als

$$\vec{B}(\vec{r} = z\vec{e}_z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int\limits_S \frac{d\vec{s} \times (\vec{r} - \vec{s})}{|\vec{r} - \vec{s}|^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi L^3} \int\limits_S \vec{e}_\varphi \times (z\vec{e}_z - R\vec{e}_\rho) \ ds = \frac{\mu_0 I}{4\pi L^3} \int\limits_S (z\vec{e}_\rho + R\vec{e}_z) \, ds$$

$$= \frac{\mu_0 I R}{4\pi L^3} \int\limits_S ds \ \vec{e}_z + \frac{\mu_0 I z}{2L^3} \underbrace{\frac{1}{2\pi R} \int\limits_S R\vec{e}_\rho \ ds}_{\overset{*}{=} 0} = \frac{\mu_0 I 2\pi R^2}{4\pi L^3} \vec{e}_z = \frac{\mu_0 I R^2}{2\left(R^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_z$$

(*) : Ausdruck stellt geometrisches Mittel der Schleife dar. Dieses ist jedoch im Ursprung!