Lösungsskizzen zur Klausur Elektrodynamik vom 22.2.2011

23. Februar 2011

1 Verständnisfragen

1. Dieses Magnetfeld entspricht einem magnetischen Monopol, sodass $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0$ nicht erfüllt sein kann.
2. $\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{B}$ ist proportional zu $F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$, was ein Lorenz-Skalar und damit invariant ist.

2 Grundlegendes zur Elektrodynamik

1. $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\Phi - 1/c\,\partial_t \boldsymbol{A}$. Eine Eichtransformation ist eine Transformation der elektromagnetischen Potentiale, welche die elektromagnetischen Felder unverändert lässt.
2. Siehe Übungsaufgabe 30 bzw. folgt aus der inhomogenen Maxwell-Gleichung $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 4\pi/c\, j^\nu$:
$\partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu} = 0 = 4\pi/c\, \partial_\nu j^\nu$.
3. Eine Green'sche Funktion erfüllt $D(x)G(x,x') = \delta(x,x')$, sodass damit eine Lösung der DG gewonnen werden kann.
Lösung: $\phi(x) = \int dx' G(x,x')\, f(x')$, Beweis: $D(x)\phi(x) = \int dx' D(x)G(x,x')\, f(x') = \int dx' \delta(x,x') f(x') = f(x)$.
Beispiele: Laplace-Operator und Coulomb-Potential, D'Alembert-Operator und retardierte Green'sche Funktion $1/(4\pi\, r)\delta(x^0 - r)$.

3 Modifiziertes Yukawa-Potential

Um den Coulomb-Anteil korrekt zu behandeln, muss der $1/r$-Anteil separiert werden:

$$-4\pi\rho = \Delta\Phi = \Delta\left(\frac{q}{r} + \frac{q}{r}(-1 + (1+\beta\, r)e^{-\alpha\, r})\right) = -4\pi\delta(\boldsymbol{r}) - \frac{q}{r}(-2\alpha\,\beta + \alpha^2(1+\beta\, r))e^{-\alpha\, r}$$

4 Spiegelladungen

Es werden 6 Spiegelladungen benötigt.

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \sum_{i,j=1}^{2} \frac{q_1}{\left(\boldsymbol{r} - \begin{pmatrix} (-1)^i a \\ (-1)^j b \\ 0 \end{pmatrix}\right)^{1/2}} + \sum_{i,j=1}^{2} \frac{q_2}{\left(\boldsymbol{r} - \begin{pmatrix} (-1)^i c \\ (-1)^j d \\ 0 \end{pmatrix}\right)^{1/2}}$$

Probe: Berechne $\Phi(x = 0, y, z)$. Dies ergibt 0.

5 Multipolentwicklung

Ladungsverteilung ist ϕ-unabhängig $\Rightarrow m = 0$

$$\begin{aligned}
q_{l0} &= \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int d\Omega dr\, r^{2+l} Y_{l0}^*(\theta, \phi)\rho(\boldsymbol{r}) = \\
&= \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \frac{q}{64\pi a^5} \int dr\, r^{4+l} e^{-r/a} \int d\Omega\, Y_{l0}^*(\theta, \phi) \left(\frac{2}{3}\sqrt{4\pi} Y_{00}(\theta, \phi) - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{16\pi}{5}} Y_{20}(\theta, \phi)\right) = \\
&= \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \frac{q}{64\pi a^5} a^{5+l}(4+l)! \left(\frac{2}{3}\sqrt{4\pi}\delta_{l0} - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{16\pi}{5}}\delta_{l2}\right) = \\
&= q\delta_{l0} - 6qa^2\delta_{l2}
\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \sum_l \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\, q_{l0} r^{-l-1} Y_{l0}(\theta, \phi) = \frac{q}{r}\left(1 - 6\left(\frac{a}{r}\right)^2 P_2(\cos\theta)\right)$$

6 Elektrisches Feld im homogenen Medium

Ansatz:

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} \sum_l \left(A_l r^l + r^{-l-1} A_l'\right) P_l(\cos\theta) & r < R \\ \sum_l \left(B_l' r^l + B_l^{-l-1}\right) P_l(\cos\theta) & r > R \end{cases}$$

Wegen $\Phi(r \to \infty) = -E_0\, r\cos\theta$ und weil $\Phi(r = 0)$ endlich sein muss, gilt $B_l' = -\delta_{l1} E_0$ und $A_l' = 0$. Aus den Übergangsbedingungen $\Phi_i(R) = \Phi_a(R)$ und $\partial_r \Phi_r(R) = \epsilon_1 \partial_r \Phi_a(R)$ bekommt man für $l = 1$: $A_1 = -3\epsilon_1 E_0/(1 + 2\epsilon_1)$ und $B_1 = R^3 E_0(1 - \epsilon_1)/(1 + 2\epsilon_1)$. Für alle anderen A_l und B_l gibt es keine Lösung, dh $A_l = B_l = 0$ für $l \neq 1$.

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} -\frac{3\epsilon_1 E_0}{1+2\epsilon_1} z & r < R \\ E_0 z \left(\frac{R^3}{r^3}\frac{1-\epsilon_1}{1+2\epsilon_1} - 1\right) & r > R \end{cases}$$

7 Strahlung einer Stabantenne

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla j} &= I_0 \cos(\omega t)\delta(x)\delta(y)(-\delta(L/2 - z) + \delta(L/2 + z)) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}, \\
\rho &= -\frac{I_0}{\omega} \sin(\omega t)\delta(x)\delta(y)(-\delta(L/2 - z) + \delta(L/2 + z))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi &= \frac{-I_0}{\omega\, r} \int d^3 r' \delta(x)\delta(y)(-\delta(L/2 - z) + \delta(L/2 + z)) \sin(\omega t - k\, r + k\, r' \cos\theta) \quad (\omega = c\, k) \\
&= \frac{-I_0}{\omega\, r} \left(\sin(\omega t - k\, r - k\frac{L}{2} \cos\theta) - \sin(\omega t - k\, r + k\frac{L}{2} \cos\theta) \right) = \\
&= 2\frac{I_0}{\omega\, r} \cos(\omega t - k\, r) \sin(k\frac{L}{2} \cos\theta)
\end{aligned}$$

8 Relativistisches Teilchen im elektromagnetischen Feld

Wähle Inertialsystem mit $\boldsymbol{E} = 0$ und $\boldsymbol{B} = B\boldsymbol{e}_z$.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\gamma m c^2 &= 0, \\
\frac{d}{dt}\gamma m \boldsymbol{v} &= e\, \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{B}
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass γ und v_3 konstant sind. Für die beiden anderen Komponenten erhalten wir

$$\begin{aligned}
\gamma \frac{dv_1}{dt} &= \omega_c v_2, \\
\gamma \frac{dv_2}{dt} &= -\omega_c v_1
\end{aligned}$$

Lösung der DGen ergibt

$$\begin{aligned}
v_1 &= A \cos\frac{\omega_c}{\gamma} t + B \sin\frac{\omega_c}{\gamma} t, \\
v_2 &= -A \sin\frac{\omega_c}{\gamma} t + B \cos\frac{\omega_c}{\gamma} t
\end{aligned}$$

bzw. mit $\boldsymbol{u} = \gamma \boldsymbol{v}$

$$\begin{aligned}
u_1 &= A\gamma \cos\omega_c \tau + B\gamma \sin\omega_c \tau, \\
u_2 &= -A\gamma \sin\omega_c \tau + B\gamma \cos\omega_c \tau.
\end{aligned}$$

Da γ konstant ist, gilt $t = \gamma\tau$. Die Frequenz im Inertialsystem ist $\omega = \omega_c/\gamma$, sodass diese bei steigender Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ kleiner wird.