



seit 1558

Friedrich-Schiller-Universität Jena
Theoretisch-Physikalisches Institut

Klausur, Elektrodynamik, WS 2010/11

Name:

Matrikel-Nummer:

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Erlaubte Hilfsmittel: **3 handgeschriebene Blätter**

Hinweis: Bitte schreiben Sie auf jeden Papierbogen Ihren Namen

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ	Note
erreichte Punkte										
max. Punkte	4	7	3	3	6	6	3	5	37	

Aufgabe 1 Verständnisfragen

Beantworten Sie folgende Fragen kurz und prägnant und nach Möglichkeit ohne Rechnung:

1. Ist das Magnetfeld $\mathbf{B} = g\mathbf{r}/r^3$ mit konstantem g eine Lösung der Maxwellgleichungen?
Begründen Sie Ihre Antwort. 2 Punkte
2. Begründen Sie, warum $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ eine Lorentz-invariante Größe ist. 2 Punkte

Aufgabe 2 Grundlegendes zur Elektrodynamik

1. Was ist der Zusammenhang zwischen elektromagnetischen Feldern und Potenzialen? Was ist eine Eichtransformation? 2 Punkte
2. Leiten Sie die Kontinuitätsgleichung wahlweise aus den Maxwell Gleichungen für $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ oder der relativistischen Formulierung der Maxwellgleichungen her. Wie ändert sich die Ladung in einem endlichen Volumen V mit der Zeit? 2 Punkte
3. Was ist eine Greensche Funktion $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ einer Differenzialgleichung $D\phi = f$, wobei D ein Differenzialoperator ist? Zeigen Sie, dass man mit Hilfe von G eine Lösung der Differenzialgleichung für eine beliebige Inhomogenität f finden kann. Geben Sie ein Beispiel für einen Differenzialoperator mit zugehöriger Greenfunktion an. 3 Punkte

Aufgabe 3 Modifiziertes Yukawa-Potential

Bestimmen Sie für das Potential

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{r}(1 + \beta r)e^{-\alpha r}$$

die Ladungsdichte.

3 Punkte

Aufgabe 4 Spiegelladungen

Gegeben seien zwei geerdete Platten, für die $x = 0$ bzw. $y = 0$ gilt. Bei $\mathbf{r}_1 = (a, b, 0)$ befinde sich eine Ladung q_1 und bei $\mathbf{r}_2 = (c, d, 0)$ eine Ladung q_2 . Es gelte $a, b, c, d > 0$. Geben Sie das Potential $\phi(\mathbf{r})$ an. Überprüfen Sie, dass das Potential auf der gesamten y - z -Ebene bei $x = 0$ verschwindet.

3 Punkte

Aufgabe 5 Multipolentwicklung

Gegeben sei die Ladungsverteilung

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{q}{64\pi a^3} \left(\frac{r}{a}\right)^2 \sin^2 \theta e^{-r/a}.$$

a ist eine Konstante. Zeigen Sie mittels *sphärischer Multipolentwicklung*, dass das Potential bei großen Abständen durch

$$\phi(r, \theta) = \frac{q'}{r} \left(1 - 6 \left(\frac{a'}{r}\right)^2 P_2(\cos(\theta)) \right)$$

gegeben ist, wobei q' und a' zu bestimmen sind.

Falls benötigt:

$$\int_0^\infty dr r^n e^{-cr} = n! c^{-1-n},$$

$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}},$$

$$Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos(\theta),$$

$$Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2(\theta) - 1),$$

$$Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin(\theta) e^{i\phi},$$

$$Y_{21} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \cos(\theta) \sin(\theta) e^{i\phi},$$

$$Y_{22} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2(\theta) e^{2i\phi}$$

6 Punkte

Aufgabe 6 Elektrisches Feld in homogenem Medium

In einem homogenen dielektrischen Medium mit der Dielektrizitätskonstanten $\epsilon_1 > 0$ gebe es ein konstantes elektrisches Feld $\mathbf{E}_0 = E_0 \mathbf{e}_z$ und keine freien Ladungen. Es werde eine Kugel mit Radius R zentriert um den Ursprung ausgeschnitten, sodass dort $\epsilon = 1$. Bestimmen Sie das elektrische Potential ϕ . 6 Punkte

Aufgabe 7 Strahlung einer Stabantenne

Gegeben sei eine Stabantenne der Länge L , die vom Strom $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$ durchflossen wird:

$$\mathbf{j}(t, \mathbf{r}) = I(t) \delta(x) \delta(y) \theta(L/2 - z) \theta(L/2 + z) \mathbf{e}_z.$$

a) Bestimmen Sie die zugehörige Ladungsdichte. 1 Punkt

b) Berechnen Sie in der Fernzonennäherung aus

$$A^\mu(ct, \mathbf{r}) \simeq \frac{1}{rc} \int d^3r' j^\mu(ct - r + \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}', \mathbf{r}')$$

das Potential $\phi(t, \mathbf{r})$ für beliebige $\mathbf{r}$. 2 Punkte

Aufgabe 8 Relativistisches Teilchen im elektromagnetischen Feld

Gegeben seien ein Punktteilchen der Ladung e und der Masse m_0 und konstante elektromagnetische Felder mit $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$ und $|\mathbf{B}| > |\mathbf{E}|$ (elliptischer Fall). Sie dürfen in einem beliebigen (geschickt gewählten) Inertialsystem rechnen.

a) Berechnen Sie aus der relativistischen Bewegungsgleichung,

$$\frac{d}{dt}(\gamma m_0 c^2) = e \mathbf{v} \cdot \mathbf{E}, \quad \frac{d}{dt}(\gamma m_0 \mathbf{v}) = e \mathbf{E} + e \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B},$$

die Vierergeschwindigkeit $u = (\gamma c, \gamma \mathbf{v})$, $u^\mu u_\mu = c^2$. 3 Punkte

b) Wie sieht der Zusammenhang zwischen der Koordinatenzeit t und der Eigenzeit τ aus? Was ist die auftretende Frequenz im Inertialsystem, das Sie gewählt haben? Wird die Frequenz ω bei steigender Geschwindigkeit des Teilchens größer oder kleiner? 2 Punkte

Benutzen Sie die Zyklotron-Frequenz $\omega_c = e B / (m_0 c)$.