Elektrodynamik
FSU Jena - WS 2005/2006
Klausur - Lösungen

Stilianos Louca

17. Februar 2008

Aufgabe 01

a) Die beiden Ladungen befinden sich o.B.d.A an den Punkten $\vec{r}_1 = 0$ und $\vec{r}_2 = x_2\vec{e}_x$. Das Potential Φ ist gegeben durch

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left[\frac{Q_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|} + \frac{Q_2}{|\vec{r}-\vec{r}_2|}\right] = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left[\frac{Q_1}{r} + \frac{Q_2}{|\vec{r}-x_2\vec{e}_x|}\right]$$

Die Äquipotentialfläche $\Phi(\vec{r}) = 0$ ist ausgezeichnet durch

$$\frac{Q_1}{r} + \frac{Q_2}{|\vec{r}-x_2\vec{e}_x|} = 0 \;\rightarrow\; \frac{Q_1}{\sqrt{\sum_i x_i^2}} = -\frac{Q_2}{\sqrt{y^2+z^2+(x-x_2)^2}}$$

Umgeformt also

$$r^2\left(Q_2^2 - Q_1^2\right) + 2xx_2Q_1^2 = x_2^2Q_1^2 \;\leftrightarrow\; (x + x_2\alpha)^2 + y^2 + z^2 = x_2^2\left(\alpha + \alpha^2\right)\;,\; \alpha := \frac{Q_1^2}{Q_2^2 - Q_1^2}$$

Obere Gleichung entspricht einer Kreisfläche mit dem Radius

$$R = |x_2|\sqrt{\alpha + \alpha^2}$$

und dem Zentrum

$$\vec{r}_c = \begin{pmatrix} -x_2\alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Bei einem Abstand d (also $x_2 = d$) ist der Radius nach oberen Überlegungen

$$R = d\sqrt{\alpha + \alpha^2} = \frac{d\,|Q_1Q_2|}{|Q_2^2 - Q_1^2|}$$

Die Abstände D_i der Punktladungen vom Kugelzentrum ergeben sich als:

$$D_1 = |\vec{r}_1 - \vec{r}_c| = d\,|\alpha| = d\frac{Q_1^2}{|Q_2^2 - Q_1^2|}$$

$$D_2 = |\vec{r}_2 - \vec{r}_c| = |d\vec{e}_x + da\vec{e}_x| = d\frac{Q_2^2}{|Q_2^2 - Q_1^2|}$$

Aufgabe 02

Das elektrostatische Feld $\vec{E}$ ergibt sich direkt aus der Definition von Φ als

$$r \neq 0 \;:\; \vec{E}(\vec{r}) = -\operatorname{grad}\Phi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial r}\frac{e^{-\mu r}}{r}\cdot\vec{e}_\rho = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{e^{-\mu r}}{r}\left(\frac{1}{r}+\mu\right)\cdot\vec{e}_\rho$$

Für $r \neq 0$ ergibt sich die Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ aus den Maxwellgleichungen als

$$\rho(\vec{r}) = -\varepsilon_0\Delta\Phi(\vec{r}) = \frac{-\varepsilon_0}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) = \frac{Q}{4\pi r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[e^{-\mu r}\left(1+\mu r\right)\right] = -\frac{\mu^2 Q}{4\pi r}e^{-\mu r}$$

Aus der Form von Φ ist zu erkennen das sich im Ursprung eine Punktladung Q_0 befindet. Diese ist durch das Gausssche Durchflutungsgesetz gegeben durch

$$Q_0 = \varepsilon_0 \lim_{R\to 0}\int_{\partial K_R}\vec{E}(\vec{r})\,d\vec{A} = \frac{Q}{4\pi}\lim_{R\to 0}\int_{r=R}\frac{e^{-\mu r}}{r}\left(\frac{1}{r}+\mu\right)\,dA = Q\lim_{R\to 0}e^{-\mu R}\left(\frac{1}{R}+\mu\right)R = Q$$

wobei K_R die Kugel um den Ursprung mit dem Radius R ist. Die Ladungsdichte ist also insgesamt

$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases} Q\delta(\vec{r}) & : \vec{r} = 0 \\ -\frac{\mu^2 Q}{4\pi r}e^{-\mu r} & : r \neq 0 \end{cases}$$

Die gesamte Ladung Q_{tot} im Raum ergibt sich durch das Gausssche Durchflutungsgesetz als

$$Q_{tot} = \varepsilon_0 \lim_{R\to\infty}\int_{\partial K_R}\vec{E}(\vec{r})\,d\vec{A} = \frac{Q}{4\pi}\cdot\lim_{R\to\infty}\int_{\partial K_R}\frac{e^{-\mu r}}{r}\left(\frac{1}{r}+\mu\right)\,dA = Q\cdot\lim_{R\to\infty}e^{-\mu R}\left(\frac{1}{R}+\mu\right)R \stackrel{*}{=} 0$$

$(*)$: L'Hopital

Aufgabe 03

Das Monopolmoment Q ergibt sich aus der Gesamtladung der Ladungsverteilung:

$$Q = q - 2q + q = 0$$

Somit verschwindet auch das Monopolpotential $\Phi_m(\vec{r}) = 0$.
Das Dipolmoment bzw. Dipolpotential sind gegeben durch

$$\vec{p} = \int \rho(\vec{r})\vec{r}\,dV = qa\vec{e}_z - 2q\vec{0} - qa\vec{e}_z = \vec{0}\;,\;\Phi_d(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{r^3} = 0$$

Schließlich das Quadrupolmoment

$$D_{ij} = \sum_i q_i \begin{pmatrix} 3x_i^2 - r_i^2 & 3x_iy_i & 3x_iz_i \\ 3y_ix_i & 3y_i^2 - r_i^2 & 3y_iz_i \\ 3z_ix_i & 3z_iy_i & 3z_i^2 - r_i^2 \end{pmatrix} = 2qa^2\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Somit ist das Quadrupolpotential gegeben durch

$$\Phi_q(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{D}(\vec{r},\vec{r})}{2r^5} = \frac{qa^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3z^2 - r^2}{r^5}$$

Aufgabe 04

Verwenden Zylinderkoordinaten (r, φ, z) und setzen den Zylinder (Radius R, Ladungsdichte ρ_0) o.B.d.A symmetrisch um die z-Achse. Aus Symmetriegründen darf das Feld $\vec{E}$ nicht von der z-Koordinate abhängen. Aus dem selben Grund muss das Feld ein axialsymmetrisches Feld sein und es muss gelten $E_z = 0$. Ferner ist

$$E_\varphi 2\pi R = \int_{r=R} \vec{E}(\vec{r})\ d\vec{r} = \int_{r\leq R} \operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r})\ d\vec{A} = 0 \ \rightarrow \ E_\varphi = 0$$

so dass wir schreiben können

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_r(\vec{r})\vec{e}_\rho = E_r(r)\vec{e}_\rho$$

Wegen $\operatorname{div} \vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ gilt im Innenraum

$$\operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rE(r)\right) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \ \rightarrow \ E(r) = \frac{r\rho_0}{2\varepsilon_0} + C\ ,\ C : const$$

Da $\vec{E}$ im Zentrum endlich ist, muss $C = 0$ sein. Im Außenraum analog:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rE(r)\right) = 0 \ \rightarrow \ E(r) = \frac{B}{r}\ ,\ B : const$$

Da an der Zylinderoberfläche keine Oberflächenladungen vorhanden sind, muss E dort stetig sein:

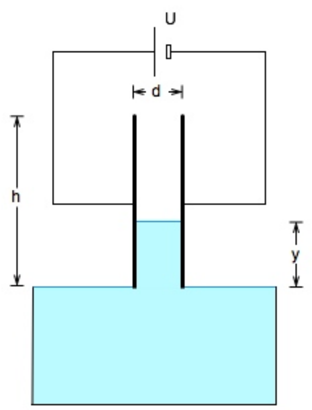
$$\lim_{r\to R^-} E(r) \stackrel{!}{=} \lim_{r\to R^+} E(r) \ \rightarrow \ B = \frac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0}$$

so dass sich schließlich das elektrostatische Feld ergibt als

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{\rho_0 r}{2\varepsilon_0}\vec{e}_\rho & : r < R \\[2ex] \dfrac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0 r}\vec{e}_\rho & : r \geq R \end{cases}$$

Aufgabe 05

Annahme: Das Dielektrikum kann ohne weiteres ab- bzw. nachfließen.



Der Plattenkondensator C kann als Parallelschaltung zweier Teil-Kondensatoren C_1, C_2 betrachtet werden, der Kapazitäten:

$$C_1 = \frac{yb\varepsilon_r\varepsilon_0}{d}\ ,\ C_2 = \frac{(h-y)b\varepsilon_0}{d} \ \rightarrow \ C = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_0 b}{d}\left[y(\varepsilon_r - 1) + h\right]$$

a) Bei der Spannung U ist die Feldenergie W_e und die Ladung Q im Kondensator gegeben durch

$$W_e = \frac{C}{2}U^2 = \frac{\varepsilon_0 b U^2}{2d}\left[y(\varepsilon_r - 1) + h\right] \ , \ Q = CU = \frac{\varepsilon_0 b U}{d}\left[y(\varepsilon_r - 1) + h\right]$$

Betrachten nun das System Spannungsquelle-Kondensator. Dieses strebt stets eine minimale potentielle Energie anzunehmen, d.h die Summe der im Kondensator und der Quelle gespeicherten Energien W_e und W_q zu minimieren. Die Energiedifferenz im System dW_s wird dann in kinetische Energie des Dielektrikums umgewandelt, gemäß

$$dW_s = -\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

Das Dielektrikum kann sich nur entlang der y Achse bewegen, so dass sich die Kraft ergibt als

$$\vec{F} = -\operatorname{grad} W_s = -\frac{dW_e}{dy}\vec{e}_y - \frac{dW_q}{dy}\vec{e}_y = -\frac{dWe}{dy}\vec{e}_y + U\frac{dQ}{dy}\vec{e}_y = \frac{\varepsilon_0 b U^2}{2d}(\varepsilon_r - 1)\vec{e}_y$$

b) Ist die Quelle vom Kondensator getrennt, so ist sie nicht mehr Teil des zu betrachtenden Systems. Es kann keine Ladung nachfließen, so dass das Dielektrikum allein durch eine Feldenergieverringerung *beschleunigt* werden kann. Die gesamte Ladung am Kondensator bleibt erhalten, so dass die Energie des Feldes jetzt gegeben ist durch

$$W_e = \frac{Q^2}{2C}$$

Somit ist

$$\vec{F} = -\operatorname{grad} W_s = -\frac{dW_e}{dy} = -\frac{Q^2}{2}\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{C}\vec{e}_y = \frac{Q^2\varepsilon_0 b}{2dC^2}(\varepsilon_r - 1)\vec{e}_y = \frac{\varepsilon_0 b U^2}{2d}(\varepsilon_r - 1)\cdot\vec{e}_y$$

Aufgabe 06

Bemerkung: Die Punktladung befinde sich im Ursprung, und $\vec{H}$ sei o.B.d.A in Richtung $\vec{e}_z$ gerichtet, d.h $\vec{H} = H\vec{e}_z$.

a) Da die Punktladung ruht, erzeugt sie kein weiteres Magnetfeld. Das von ihr erzeugte elektrische Feld $\vec{E}$ ist gegeben durch

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

Der Poyntingvektor ist somit gegeben durch

$$\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z\right)\times\vec{e}_z = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(-x\vec{e}_y + y\vec{e}_x\right) \cong -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_\varphi$$

Bei gegebenem Ort $\vec{r}$ steht der Pointingvektor also senkrecht zu $\vec{r}$ und $\vec{H}$, in Richtung $-\vec{e}_\varphi$.

b) Die Divergenz des Poyntingvektorfeldes ergibt sich als

$$\operatorname{div}\vec{S} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\partial}{\partial x}\frac{y}{r^3} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{x}{r^3}\right] = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{3yx}{r^5} + \frac{3xy}{r^5}\right] = 0$$

was auch physikalisch zu erwarten wäre. div $\vec{S}$ stellt nämlich den Energiefluss des Feldes zu einem Punkt dar, und dieser sollte im stationären Fall 0 sein (nichts bewegt sich, nichts ändert sich $\rightarrow$ Energiedichte bleibt auch konstant). Dies wird auch ersichtlich wenn man sich den Poyntingschen Satz im Vakuum anschaut:

$$\operatorname{div}\vec{S} = \underbrace{-\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D} + \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}\right]}_{0} - \underbrace{\vec{j}}_{0}\cdot\vec{E} = 0$$

Aufgabe 07

Die Energie des Dipols $\vec{m}$ ist im Magnetfeld gegeben durch

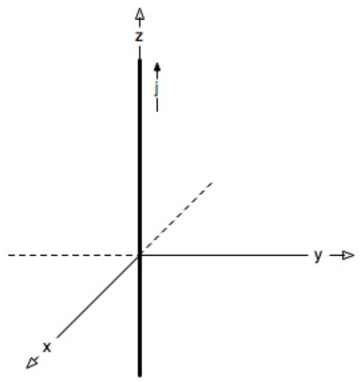
$$W_m = -\frac{1}{\mu_0}\vec{m}\cdot\vec{B} = -\frac{B_0}{\mu_0}\vec{m}\cdot\vec{e}_x$$

Im Gleichgewicht ist W_m minimal, d.h $\vec{m}\cdot\vec{e}_x$ ist maximal. Somit muss $\vec{m}\parallel\vec{e}_x$ sein, d.h der Permanentmagnet zeigt in x Richtung.

Betrachten nun das vom Draht L erzeugte Magnetfeld $\vec{B}$, und verwenden dazu *verschobene* Zylinderkoordinaten (r,φ,z), d.h der Draht befinde sich jetzt im Ursprung, und der Permanentmagnet in

$$\vec{r}_m = (d-x_0)\vec{e}_x - y_0\vec{e}_y$$

wobei (x_0,y_0) die ursprünglichen Koordinaten des Drahtes seien.



Aus Symmetriegründen ist das Magnetfeld nicht abhängig von der z-Koordinate. Aus dem gleichen Grund dürfen die B_r, B_φ und B_z Komponenten nicht von φ abhängen. Aus dem Biot-Savartschen Gesetzt

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_L \frac{d\vec{s}\times(\vec{r}-\vec{s})}{|\vec{r}-\vec{s}|^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\vec{e}_z\times(r\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z - s\vec{e}_z)}{|\vec{r}-s\vec{e}_z|^3}\,ds = \frac{\mu_0 I r}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\vec{e}_z\times\vec{e}_\rho}{|\vec{r}-s\vec{e}_z|^3}\,ds$$

ist ersichtlich dass $B_z = B_r = 0$ sind, so dass wir schreiben können

$$\vec{B}(\vec{r}) = B(r)\vec{e}_\varphi$$

Somit ist:

$$2\pi r B(r) = \int_{r'=r}\vec{B}(\vec{r}\,')\;d\vec{r} = \int_{r'<r}\operatorname{rot}\vec{B}(\vec{r}\,')\;d\vec{A} = \mu_0\int_{r'<r}\vec{j}(\vec{r}\,')\;d\vec{A} = \mu_0 I \;\rightarrow\; \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e}_\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r^2}\left(-y\vec{e}_x + x\vec{e}_y\right)$$

Somit ist das gesamte Magnetfeld im Raum gegeben durch

$$\vec{B}_g(\vec{r}) = B_0\vec{e}_z + \frac{\mu_0 I}{2\pi r^2}\left(-y\vec{e}_x + x\vec{e}_x\right)$$

Am Ort des Dipols ist somit

$$\vec{B}_g(\vec{r}_m) = B_0\vec{e}_x + \frac{\mu_0 I}{2\pi r_m^2}\left(y_0\vec{e}_x + (d-x_0)\vec{e}_y\right)$$

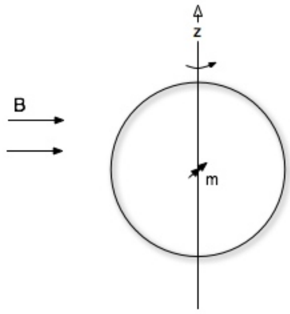
Analog zu vorhin dreht sich auch hier $\vec{m}$ parallel zu $\vec{B}_g$. Setzen wir z.B $x_0 = y_0 = 0$ (Draht ist identisch mit der z-Achse) so erhalten wir

$$\vec{B}_g(\vec{r}_m) = B_0\vec{e}_x + \frac{\mu_0 I}{2\pi d}\vec{e}_y$$

Der Magnet dreht sich also je nach Verhältnissen der Teilfelder, mehr oder weniger in x bzw. y-Richtung.

Aufgabe 08

Der Kreis K rotiere o.B.d.A um die z-Achse und das $\vec{B}$-Feld sei o.B.d.A parallel zur x-Achse gerichtet, d.h $\vec{B} = B\vec{e}_x$.



Die Magnetnadel (Dipolmoment $\vec{m}$) würde sich analog zur vorigen Aufgabe ohne den rotierenden Kreis normalerweise in Richtung des äußeren Magnetfeldes drehen d.h $\vec{m} \parallel \vec{e}_x$. Durch die Drehung des Kreises ändert sich der magnetische Fluss gemäß

$$\frac{d}{dt}\Phi(t) = \frac{d}{dt}\int_K \vec{B}\ d\vec{A} = \pi a^2 B \frac{d}{dt}\left[\vec{n}\cdot\vec{e}_x\right] = \pi a^2 B \cdot \dot{\vec{n}} \cdot \vec{e}_x$$

wobei $\vec{n}$ der Normaleneinheitsvektor auf die Kreisfläche K sei. Setzen wir o.B.d.A

$$\vec{n} = \cos(\omega t)\vec{e}_x + \sin(\omega t)\vec{e}_y$$

so erhalten wir eine durch das äußere Magnetfeld induzierte Spannung im Draht

$$U_i(t) = -\frac{d}{dt}\Phi(t) = \pi a^2 B\omega \sin(\omega t)$$

Vernachlässigen wir die Selbstinduktion in der Schleife, so ist der in ihr fließende Strom gegeben durch

$$I_i(t) = \underbrace{\frac{\pi a^2 B\omega}{R}}_{I_0}\sin(\omega t)$$

Annahme: Die Winkelgeschwindigkeit ω ist klein genug, um zum einen eine Retardierung und zum anderen eine Kopplung des $\vec{E}$ und $\vec{B}$ Feldes zu vernachlässigen.
Betrachten nun das von I_i erzeugte Magnetfeld im Zentrum des Kreises und verwenden dazu den Biot-Savartschen Satz:

$$\vec{B}_i\left(\vec{0},t\right) = \frac{\mu_0 I(t)}{4\pi}\int_{\partial K}\frac{d\vec{s}\times(-\vec{s})}{|\vec{s}|^3} = \frac{\mu_0 I(t)}{4\pi}\int_{\partial K}\frac{\vec{n}}{a^2}\ ds = \frac{\mu_0 I(t)}{4\pi}\cdot\frac{2\pi a\vec{n}}{a^2} = \frac{\mu_0 I(t)}{2a}\vec{n} = \frac{a\omega\pi\mu_0 B}{2R}\sin(\omega t)\cdot\vec{n}$$
$$= \frac{a\omega\pi\mu_0 B}{2R}\left[\sin(2\omega t)\vec{e}_x + \sin^2(\omega t)\vec{e}_y\right]$$

Das gesamte Magnetfeld ist im Zentrum also

$$\vec{B}_g(t) = B\vec{e}_x + \frac{a\omega\pi\mu_0 B}{2R}\left[\frac{1}{2}\sin(2\omega t)\vec{e}_x + \sin^2(\omega t)\vec{e}_y\right]$$

Unter Voraussetzungen minimaler Trägheit, oszilliert die Magnetnadel also mit der Frequenz $\omega_m = 2\omega$ um ihre Gleichgewichtslage, mit der Amplitude

$$\Phi = \max_t\left[\vec{B}_g\angle\vec{e}_x\right] = \arctan\left(\frac{\pi a\omega\mu_0}{2R}\right)$$

Im zeitlichen Mittel ist das $\vec{B}$-Feld im Zentrum gegeben durch

$$\left\langle\vec{B}_g\right\rangle = B\vec{e}_x + \frac{a\omega\pi\mu_0 B}{2R}\left[\langle\sin(\omega t)\cos(\omega t)\rangle\,\vec{e}_y + \left\langle\sin^2(\omega t)\right\rangle\vec{e}_y\right] = B\vec{e}_x + \frac{a\omega\pi\mu_0 B}{4R}\vec{e}_y$$

Ist die Nadel also träge genug, so richtet sie sich parallel zu $\left\langle\vec{B}_g\right\rangle$ aus, also im Winkel

$$\Delta\varphi = \arctan\left(\frac{a\omega\pi\mu_0}{4R}\right)$$

Aufgabe 09

Beginnen mit

$$F(\vec{r},t) = \frac{f\left(t \pm \frac{r}{c}\right)}{r} = \frac{f(p(r))}{\partial r} \ , \ p(r) := t \pm \frac{r}{c}$$

gehen damit für $r \neq 0$ in die DGL ein

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) F = \frac{1}{rc^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} f\left(t \pm \frac{r}{c}\right) - \Delta \frac{f\left(t \pm \frac{r}{c}\right)}{r} = \frac{1}{rc^2} f''(p) - \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2 \frac{\partial}{\partial r}\frac{f(p(r))}{r}\right]$$

$$= \frac{1}{rc^2} f''(p) - \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r f'(p) p'(r) - f(p(r))\right] = \frac{1}{rc^2} f''(p) - \frac{1}{r}\left[f''(p)\left(p'(r)\right)^2 + f''(p)p''(r)\right]$$

$$= \frac{1}{rc^2} f''(p) - \frac{1}{rc^2} f''(p) = 0$$

und sehen dass F Lösung der homogenen Wellengleichung ist. Die Funktionen F lösen die Wellengleichung

$$\Delta U(\vec{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} U(\vec{r},t) = -4\pi f(t)\delta(\vec{r})$$

Dies ist ersichtlich sobald man die Lösung letzterer in Form der retardierten/avancierten Potentiale aufschreibt:

$$U(\vec{r},t) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_V -4\pi f\left(t - \frac{|\vec{r} \pm \vec{r}\,'|}{c}\right)\frac{\delta(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\, dV' = \frac{f\left(t \pm \frac{r}{c}\right)}{r} = F(\vec{r},t) \quad \square$$