Elektrodynamik
FSU Jena - WS 2004/2005
Klausur - Lösungen

Stilianos Louca

17. Februar 2008

Aufgabe 01

Die Maxwellgleichungen lauten in ihrer allgemeinsten Form:

$$\operatorname{rot}\vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}(\vec{r},t) \qquad \operatorname{div}\vec{D}(\vec{r},t) = \rho_e(\vec{r},t)$$

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{j}(\vec{r},t) + \frac{\partial}{\partial t}\vec{D}(\vec{r},t) \qquad \operatorname{div}\vec{B}(\vec{r},t) = 0$$

wobei

$$\vec{P}(\vec{r},t) = \vec{D}(\vec{r},t) - \varepsilon_0\vec{E}(\vec{r},t)$$

das Polarisationsfeld und

$$\vec{M}(\vec{r},t) = \vec{B}(\vec{r},t) - \mu_0\vec{H}(\vec{r},t)$$

das Magnetisierungsfeld sind. Im Falle von linearen, isotropen Medien kann man schreiben

$$\vec{P}(\vec{r},t) = \int\limits_0^\infty R_p(\vec{r},\tau)\vec{E}(\vec{r},t-\tau)\ d\tau$$

$$\vec{M}(\vec{r},t) = \int\limits_0^\infty R_m(\vec{r},\tau)\vec{B}(\vec{r},t-\tau)\ d\tau$$

wobei R_p und R_m die Response Funktionen des Mediums bzgl. der Erregung im $\vec{E}$- bzw. $\vec{B}$-Feld sind. Durch das Faltungstheorem weis man

$$\vec{P}^f(\vec{r},\omega) = \underbrace{R^f(\vec{r},\omega)}_{\chi_e(\vec{r},\omega)}\cdot\vec{E}^f(\vec{r},\omega) \ \rightarrow\ \vec{D}^f(\vec{r},\omega) = \varepsilon_0(1+\chi_e(\vec{r},\omega))\vec{E}^f(\vec{r},\omega)$$

wobei der Index "f" immer eine Fouriertransformation impliziert! Die Funktion $\chi_e(\vec{r},\omega)$ nennt man die elektrische Suszeptibilitätsfunktion des Mediums. Analog auch:

$$\vec{M}^f(\vec{r},\omega) = \chi_m(\vec{r},\omega)\vec{B}^f(\vec{r},\omega)\ ,\ \chi_m(\vec{r},\omega) := \mathcal{F}\left[R_m(\vec{r},\cdot)\right](\omega)$$

wobei $chi_m(\vec{r},\omega)$ die magnetische Suszeptibilitätsfunktion des Mediums ist.

Aufgabe 02

Beginnen mit den oben genannten Maxwellgleichungen, schreiben

$$0 = \operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{H}(\vec{r},t) = \operatorname{div}\vec{j}(\vec{r},t) + \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\vec{D}(\vec{r},t) = \operatorname{div}\vec{j}(\vec{r},t) + \frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r},t)$$

und bekommen so genau die Kontinuitätsgleichung. Diese ist eine Aussage über die lokale Ladungserhaltung: Die Ladungsänderung an einem Ort entspricht dem netto-Ladungsfluss zu diesen Punkt. In integraler Formulierung:

$$J(t) := \int\limits_{\partial V} \vec{j}(\vec{r},t)\ d\vec{A} = \int\limits_{V} \operatorname{div}\vec{j}(\vec{r},t)\ dV = \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{V} \rho(\vec{r},t)\ dV =: \frac{\partial}{\partial t}Q(t)$$

Die Ladung Q in einem Volumen ändert sich entsprechend dem Ladungsfluss J aus/in das Volumen.

Aufgabe 03

Mit dem Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r},t)$ und dem skalaren Potential $\Phi(\vec{r},t)$, definiert als

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \operatorname{rot}\vec{A}(\vec{r},t)\ ,\ \vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}(\vec{r},t) - \operatorname{grad}\Phi(\vec{r},t)$$

erhält man durch die Maxwellgleichungen

$$\operatorname{rot}\vec{B} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A} - \Delta\vec{A} = \mu_0\vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} = \mu_0\vec{j} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial}{\partial t}\vec{A} + \operatorname{grad}\Phi(\vec{r},t)\right]$$

$$\rightarrow\ \Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} = -\mu_0\vec{j} + \operatorname{grad}\left[\operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\Phi\right]$$

$$\operatorname{div}\vec{E} = \operatorname{div}\left[-\frac{\partial}{\partial t}\vec{A} - \operatorname{grad}\Phi\right] = -\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\vec{A} - \Delta\Phi = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\rightarrow\ \Delta\Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} - \frac{\partial}{\partial t}\left[\operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\Phi\right]$$

Durch die Lorenzeichung

$$\operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\Phi = 0$$

erhält man schließlich

$$\Delta\Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}\ ,\ \Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} = -\mu_0\vec{j}$$

Aufgabe 04

Die retardierten Potentiale ergeben sich als

$$\Phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_{V} \frac{\rho\left(\vec{r}\,',t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\ dV'$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_{V} \frac{\vec{j}\left(\vec{r}\,',t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\ dV'$$

Aufgabe 05

Das elektrostatische Potential $\Phi(\vec{r})$ erfüllt im Außenraum die Laplace Gleichung

$$\Delta\Phi(\vec{r}) = 0$$

und im Innenraum die Poissongleichung

$$\Delta\Phi = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\ ,\ \rho_0 := \frac{3Q}{4\pi R^3}$$

wobei ρ_0 die Ladungsdichte sei. Aufgrund von Symmetriegründen darf Φ nur vom Abstand r abhängen, so dass man für den Außenraum

$$\Delta\Phi(\vec{r}) = \Delta\Phi(r) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) = 0 \ \rightarrow\ r^2\Phi'(r) = C_0 : const \ \rightarrow\ \Phi_a(r) = -\frac{C_0}{r} + C_1$$

Analog im Innenraum:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \ \rightarrow\ r^2\Phi'(r) = -\frac{\rho_0 r^3}{3\varepsilon_0} + B_0 \ \rightarrow\ \Phi_i(r) = -\frac{\rho_0 r^2}{6\varepsilon_0} - \frac{B_0}{r} + B_1$$

Da wir erwarten dass Φ_i im Ursprung endlich ist, muss $B_0 = 0$ sein. Bei natürlichen Randbedingungen muss außerdem $\lim\limits_{r\to\infty}\Phi(r) = 0$ sein, d.h $C_1 = 0$. Durch die Stetigkeitsbedingung an Φ, insbesondere an der Grenzfläche $r = R$ erhält man

$$\Phi_a(R) = -\frac{C_0}{R} \stackrel{!}{=} \Phi_i(R) = -\frac{\rho_0 R^2}{6\varepsilon_0} + B_1 \ \rightarrow\ B_1 = \frac{\rho_0 R^2}{6\varepsilon_0} - \frac{C_0}{R}$$

Da keine Oberflächenladungen vorhanden sind, ist die Normalkomponente von $\vec{E} = -\operatorname{grad}\Phi$ an der Oberfläche der Kugel stetig, so dass gelten muss:

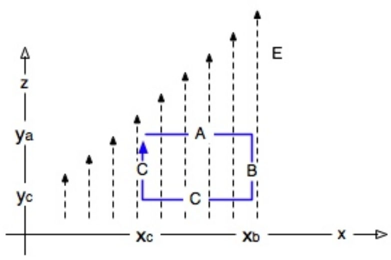
$$\frac{\partial\Phi_a}{\partial r}\,|_R = \frac{C_0}{R^2} \stackrel{!}{=} \frac{\partial\Phi_i}{\partial r}\,|_R = -\frac{\rho_0 R}{3\varepsilon_0} \ \rightarrow\ C_0 = -\frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0} = -\frac{Q}{4\varepsilon_0} \ \rightarrow\ B_1 = \frac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0} = \frac{3Q}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

Somit ergibt sich schließlich:

$$\Phi(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} & : r > R \\[2ex] \dfrac{3Q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}\left(R^2 - \dfrac{r^2}{3}\right) & : r \leq R \end{cases}$$

Aufgabe 06

Betrachten solch ein Feld $\vec{E}(\vec{r}) = E(x)\vec{e}_z$ das in x-Richtung zunimmt, d.h $E'(x) > 0$, und die unten illustrierte, geschlossene Kurve Γ.



Wegen $\operatorname{rot}\vec{E} = 0$ muss

$$\int\limits_\Gamma \vec{E}(\vec{r})\ d\vec{r} = 0$$

sein (konservatives Feld). Die Integration über A und C liefert keinen Beitrag, da $\vec{E} \perp d\vec{r}$ ist. Da $\vec{E}$ auf B und D konstant ist und $\vec{E} \parallel d\vec{r}$ ist, können wir schreiben

$$\int\limits_\Gamma \vec{E}\ d\vec{r} = E(x = x_c)(y_a - y_c) + E(x = x_b)\cdot(y_c - y_a) = (y_a - y_c)\cdot\underbrace{(E(x = x_c) - E(x = x_b))}_{<0} \neq 0$$

was aber ein Widerspruch ist! Somit kann es solch ein Feld nicht geben!

Aufgabe 07

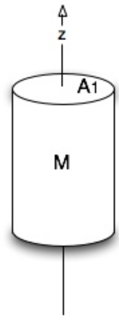
Im magnetostatischen Fall ist allgemein

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

Aus Symmetriegründen darf das $\vec{B}$ Feld nicht von der z-Koordinate abhängen, wählen deshalb Zylinderkoordinaten (r, φ, z). Aus Symmetriegründen dürfen außerdem die Komponenten B_φ, B_r, B_z nicht von der φ Koordinate abhängen, so dass wir schreiben können

$$\vec{B}(\vec{r}) = B_r(r)\vec{e}_\rho + B_\varphi(r)\vec{e}_\varphi + B_z(r)\vec{e}_z$$

Betrachten zunächst einen Zylinder Z mit den Grundflächen A_1, A_2 und der Mantelfläche M, der symmetrisch um die z-Achse liegt.



Wegen $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ muss

$$0 = \int\limits_Z \operatorname{div} \vec{B}\; dV = \int\limits_{\partial Z} \vec{B}\; d\vec{A} = \int\limits_M \vec{B}\; d\vec{A} + \int\limits_{A_1} \vec{B}\; d\vec{A} + \int\limits_{A_2} \vec{B}\; d\vec{A} = \int\limits_M B_r\; dA + \underbrace{\int\limits_{A_1} B_z\; dA - \int\limits_{A_2} B_z\; dA}_{0} = B_r(r = R) \cdot |M|$$

sein, also $B_r = 0$. Durch das Biot-Savartsche Gesetz

$$d\vec{B} \sim \vec{j}(\vec{r}) \times \vec{r}$$

ist ersichtlich dass das $\vec{B}$ Feld immer senkrecht zu $\vec{j}$ stehen muss, also $\vec{B} \perp \vec{e}_z$. Somit ist $B_z = 0$, und wir können schreiben

$$\vec{B}(\vec{r}) = B(r)\vec{e}_\varphi$$

Betrachten nun die symmetrisch um die z-Achse liegende Kreisfläche K_R, mit dem Radius R. Es gilt:

$$2\pi R B(R) = \int\limits_{\partial K_R} \vec{B}\; d\vec{s} = \int\limits_{K_R} \operatorname{rot} \vec{B}\; d\vec{A} = \int\limits_{K_R} \mu_0 \vec{j}\; d\vec{A} = \mu_0 I_R \;\rightarrow\; \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I_r}{2\pi r}$$

wobei I_R der durch die Kreisfläche K_R fließende Strom ist. Es gilt:

$$I_R = \begin{cases} 0 & : r < R_1 \\ j_0 \pi \left(r^2 - R_1^2\right) & : r \in [R_1, R_2] \\ j_0 \pi \left(R_2^2 - R_1^2\right) & : r > R_2 \end{cases}$$

und somit

$$\vec{B}(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & : r < R_1 \\ \dfrac{\mu_0 j_0}{2r} \left(r^2 - R_1^2\right) \vec{e}_\varphi & : r \in [R_1, R_2] \\ \dfrac{\mu_0 j_0}{2r} \left(R_2^2 - R_1^2\right) \vec{e}_\varphi & : r > R_2 \end{cases}$$

Aufgabe 08

Beginnen mit der Kontinuitätsgleichung und schreiben

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r},t) = -\operatorname{div}\vec{j}(\vec{r},t) = -\operatorname{div}\left[\sigma\vec{E}(\vec{r},t)\right] = -\sigma\operatorname{div}\vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}\rho(\vec{r},t)$$

Obere stellt eine gewöhnliche DGL 1. Ordnung dar, deren Lösung gegeben ist durch

$$\rho(\vec{r},t) = \rho_0(\vec{r})e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}t}$$

Durch Grenzwertbildung

$$\lim_{t\to\infty}\rho(\vec{r},t) = \rho_0(\vec{r})\cdot\lim_{t\to\infty}e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}t} = 0$$

ist ersichtlich dass $\rho(\vec{r},t)$ überall gegen 0 strebt. $\square$