Elektrodynamik
FSU Jena - SS 2007
Klausur - Lösungen

Stilianos Louca

19. Februar 2008

Aufgabe 01

Seien Φ und $\vec{E}$ jeweils das elektrostatische Potential bzw. elektrische Feld. Die Kugel (Ladungsdichte ρ_0) befinde sich im Ursprung. Verwenden Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) und sehen dass aufgrund von Symmetriegründen das Potential nur vom Abstand r abhängen kann. Somit ist

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial r}\vec{e}_\rho \;\rightarrow\; \vec{E}(\vec{r}) = E(r)\vec{e}_\rho$$

ein radiales Feld.

a) Wegen $\operatorname{div}\vec{E} = \dfrac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$ gilt für einen Punkt $\vec{r}$, mit

$$K_r := \left\{\vec{r}\,' \in \mathbb{R}^3 : r' \leq r\right\}$$

die Identität

$$4\pi r^2 E(r) = \int\limits_{\partial K_r} E(r)\vec{e}_\rho \; d\vec{A} = \int\limits_{\partial K_r} \vec{E}(\vec{r}\,') \; d\vec{A} = \int\limits_{K_r} \operatorname{div}\vec{E}(\vec{r}\,') \; dV' = \int\limits_{K_r} \frac{\rho(\vec{r}\,')}{\varepsilon_0} \; dV' =: \frac{Q_r}{\varepsilon_0}$$

Fall 1: $r > R$. Dann ist $Q_r = \dfrac{4\pi R^3 \rho_0}{3}$ und somit

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\vec{e}_\rho = \frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_\rho$$

Fall 2: $r < R$. Dann ist $Q_r = \dfrac{4\pi r^3 \rho_0}{3}$ und somit

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0}\vec{e}_\rho$$

b) Das elektrostatische Potential ist allgemein gegeben durch

$$\Phi(r) = -\int E(r) \; dr$$

Innerhalb der Kugel also:

$$\Phi_i(r) = -\frac{\rho_0 r^2}{6\varepsilon_0} + C_0 \;,\; C \in \mathbb{R}$$

Außerhalb:

$$\Phi_a(r) = \frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0 r} + C_1$$

Bemerke: Konstanten C_0, C_1 noch unbestimmt!
Fordern natürliche Randbedingungen, d.h

$$\lim_{r\to\infty} \Phi(r) = 0 \;\rightarrow\; C_1 = 0$$

Fordern außerdem Stetigkeit an Übergangsgrenze:

$$\Phi_i(R) = \Phi_a(R) \;\rightarrow\; C_0 = \frac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0}$$

Somit ergibt sich schließlich:

$$\Phi(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0 r} & : r > R \\[2ex] \dfrac{\rho_0}{2\varepsilon_0}\left(R^2 - \dfrac{r^2}{3}\right) & : r \leq R \end{cases}$$

c) Die elektrostatische Energie W ist gegeben durch

$$W = \frac{1}{2}\int\limits_{K_R} \Phi(\vec{r})\rho(\vec{r})\; dV = \frac{\rho_0^2}{4\varepsilon_0}\int\limits_{K_R}\left(R^2 - \frac{r^2}{3}\right)\; dV = \frac{\rho_0^2}{4\varepsilon_0}\cdot\frac{4\pi R^5}{3} - \frac{\rho_0^2}{12\varepsilon_0}\int\limits_{K_R} r^2\; dV$$

$$= \frac{\rho_0^2\pi R^5}{3\varepsilon_0} - \frac{\rho_0^2}{12\varepsilon_0}\int\limits_0^R 4\pi r^4\; dr = \frac{\rho_0^2\pi R^5}{3\varepsilon_0} - \frac{\rho_0^2\pi R^5}{15\varepsilon_0} = \frac{4\pi\rho_0^2 R^5}{15\varepsilon_0}$$

d) Für diskrete Ladungsverteilungen

$$\rho(\vec{r}) = \sum_i q_i\delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$$

ist die gespeicherte Energie allgemein gegeben durch

$$W = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\sum_{i,j}\frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

Speziell für unseren Fall also

$$W = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{2a}\right\} = \frac{5Q^2}{8\pi\varepsilon_0 a}$$

Aufgabe 02

Die Ladungsverteilung ρ befinde sich im Volumen V, das den Ursprung enthalte.

a) Das Potential Φ ist nach 2. Näherung gegeben durch

$$\Phi(\vec{r}) = \underbrace{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}}_{\Phi_1(\vec{r})} + \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}}_{\Phi_2(\vec{r})}$$

Dabei sind Φ_1 und Φ_2 jeweils das Monopolpotential und das Dipolpotential, d.h in erster Näherung sieht das Potential so aus, als wenn die gesamte Ladung an einem Punkt konzentriert wäre, und in zweiter Näherung als wenn sie aus einem Dipol bestehe.

b) Das Moment Q entspricht genau der Gesamtladung

$$Q = \int\limits_V \rho(\vec{r})\; dV$$

und $\vec{p}$ dem Dipolmoment

$$\vec{p} = \int\limits_V \rho(\vec{r})\vec{r}\, dV$$

der Ladungsverteilung.

c) Der zweite Anteil

$$\Phi_k(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{R}{r} \cdot \frac{\vec{d} \cdot \left[\frac{R^2}{r^2}\vec{r} - \vec{a}\right]}{\left|\frac{R^2}{r^2}\vec{r} - \vec{a}\right|^3}$$

entspricht genau dem von der an der Kugeloberfläche angeordneten Ladungsverteilung induzierten Potential. Ist Q die gesamte Ladung auf der Kugel, so folgt im Kontext der Multipolentwicklung

$$\Phi_k(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + o\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

Somit ist

$$\lim_{r\to\infty} \Phi_k(r) \cdot r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} + \underbrace{\lim_{r\to\infty} o\left(\frac{1}{r}\right)}_{0} = -\frac{R}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \lim_{r\to\infty} \frac{\vec{d} \cdot \left[\frac{R^2}{r^2}\vec{r} - \vec{a}\right]}{\left|\frac{R^2}{r^2}\vec{r} - \vec{a}\right|^3} = \frac{R}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{d}\cdot\vec{a}}{a^3}$$

$$\rightarrow\ Q = \frac{R}{a^3}\vec{d}\cdot\vec{a}$$

Aufgabe 03

a) Unter Verwendung der Greenschen Identität können wir schreiben

$$\int\limits_V \left[\Phi(\vec{r}\,')\Delta_{\vec{r}\,'}G(\vec{r},\vec{r}\,') - G(\vec{r},\vec{r}\,')\Delta_{\vec{r}\,'}\Phi(\vec{r}\,')\right]\, dV' = \int\limits_V \left[-\Phi(\vec{r}\,')\frac{\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')}{\varepsilon_0} + G(\vec{r},\vec{r}\,')\frac{\rho(\vec{r}\,')}{\varepsilon_0}\right]\, dV'$$

$$= -\frac{\Phi(\vec{r})}{\varepsilon_0} + \int\limits_V \frac{\rho(\vec{r}\,')}{\varepsilon_0}G(\vec{r},\vec{r}\,')\, dV' = \int\limits_{\partial V} \left[\Phi(\vec{r}\,')\frac{\partial G(\vec{r},\vec{r}\,')}{\partial n'} - G(\vec{r},\vec{r}\,')\frac{\partial\Phi(\vec{r}\,')}{\partial n'}\right]\, dA'$$

$$\rightarrow\ \Phi(\vec{r}) = \int\limits_V \rho(\vec{r}\,')G(\vec{r},\vec{r}\,')\, dV' - \varepsilon_0 \int\limits_{\partial V} \left[\Phi(\vec{r}\,')\frac{\partial G(\vec{r},\vec{r}\,')}{\partial n'} - G(\vec{r},\vec{r}\,')\frac{\partial\Phi(\vec{r}\,')}{\partial n'}\right]\, dA'$$

Ist also $\Phi(\partial V)$ bzw. $\frac{\partial\Phi(\vec{r})}{\partial n}\,|_{\partial V}$ bekannt, so ist $\Phi(\vec{r})$ durch obere Integration bestimmbar!

b) Die Greensche Funktion ist in diesem Kontext nicht eindeutig bestimmt. Wird sie so gewählt, dass

$$G(\vec{r}, \partial V) = 0$$

ist, so ergibt sich durch obere Formel die Lösung für das Dirichletsche Randwertproblem (Φ bekannt auf ∂V). Ist andernfalls G so dass

$$\frac{\partial G(\vec{r},\vec{r}\,')}{\partial n'}\,|_{\vec{r}\,'\in\partial V} = 0$$

ist, so stellt obere Formel eine Lösung für das Neumann Randwertproblem dar ($\partial_n\Phi$ bekannt auf ∂V).

c) Allgemein muss $f(\vec{r},\vec{r}\,')$ eine symmetrische sein, und ferner in V harmonisch sein! Für die Dirichletsche Randbedingung muss

$$G(\vec{r},\vec{r}\,')\,|_{\vec{r}\,'\in\partial V} = 0$$

sein, also

$$f(\vec{r},\vec{r}\,')\,|_{\vec{r}\,'\in\partial V} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

Für die Neumann Randbedingung muss

$$\frac{\partial G(\vec{r},\vec{r}\,')}{\partial n'}\,|_{\vec{r}\,'\in\partial V} = 0$$

sein, also

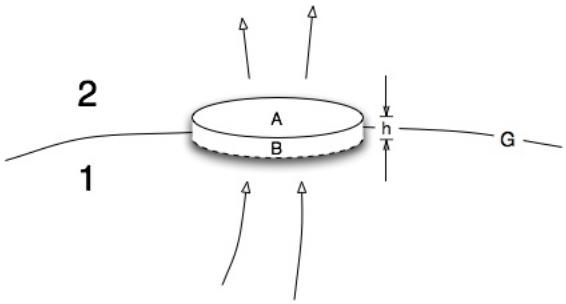
$$\frac{\partial f(\vec{r},\vec{r}\,')}{\partial n'}\,|_{\vec{r}\,'\in\partial V} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial n'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

Aufgabe 04

Allgemein gilt

$$\operatorname{rot}\vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}(\vec{r},t) \quad , \quad \operatorname{div}\vec{D}(\vec{r},t) = \rho_e(\vec{r},t)$$

Betrachten folgende Grenzschicht G zwischen zwei Medien mit den Dielektrizitätskonstanten ε_1 und ε_2.



In den beiden Medien herrschen jeweils die Felder $\vec{E}_1, \vec{D}_1 = \varepsilon_1\varepsilon_0\vec{E}_1,\ \vec{E}_2, \vec{D}_2 = \varepsilon_2\varepsilon_0\vec{E}_2$. Der Normalenvektor (in Richtung 2) sei $\vec{n}$. Betrachten das oben Illustrierte, zylinderförmige Volumen V und den 3 Randflächen A_1, A_2, B. Es gilt:

$$\int\limits_V \rho_e(\vec{r})\ dV = \int\limits_V \operatorname{div}\vec{D} = \int\limits_{\partial V}\vec{D}\ d\vec{A} = -\int\limits_A D_1^n dA + \int\limits_A D_2^n dA + \int\limits_B \vec{D}\ d\vec{A}$$

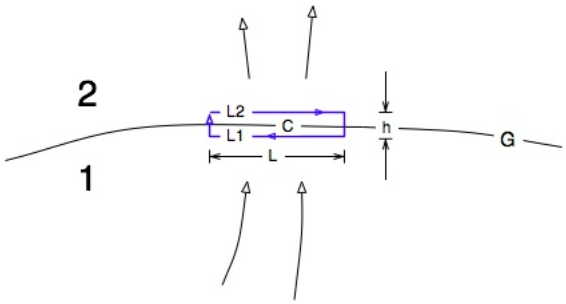
Lässt man $h \to 0$ gehen, so erhält man

$$\eta_e(\vec{r}) = \frac{d}{dA}\lim_{h\to 0}\int\limits_V \rho_e(\vec{r})\ dV = \frac{d}{dA}\left\{-\int\limits_A D_1^n dA + \int\limits_A D_2^n dA\right\} = D_2^n - D_1^n$$

wobei η_e die Flächenladungsdichte auf der Grenzfläche ist. Für $\eta_e = 0$ ist somit $D_2^n = D_1^n$, d.h die Normalkomponente von D ist stetig. Somit gilt für die Normalkomponente von $\vec{E}$:

$$\varepsilon_1 E_1^n = \varepsilon_2 E_2^n$$

Betrachten jetzt unten illustrierten, die Fläche C umschließenden, Integrationsweg (Blau)



In diesem Kontext gilt

$$\int\limits_{L_1} \left(E_2^t - E_1^t\right)\ dl = \int\limits_{L_2} E_2^t\ dl - \int\limits_{L_1} E_1^t\ dl = \lim_{h\to 0} \int\limits_{\partial C} \vec{E}\ d\vec{s} = \lim_{h\to 0} \int\limits_{C} \operatorname{rot} \vec{E}\ d\vec{A} = -\lim_{h\to 0} \int\limits_{C} \dot{\vec{B}}\ d\vec{A} = 0$$

Durch Ableiten

$$E_2^t - E_1^t = \frac{d}{dl} \int\limits_{L_1} \left(E_2^t - E_1^t\right)\ dl = \frac{d}{dl} 0 = 0$$

ergibt sich dass die Tangentialkomponente von $\vec{E}$ stetig sein muss. Somit folgt für die Tangentialkomponente von $\vec{D}$:

$$\frac{D_1^t}{\varepsilon_1} = \frac{D_2^t}{\varepsilon_2}$$

Aufgabe 05

Verwenden Zylinderkoordinaten (r, φ, z).

a) Aufgrund von Symmetriegründen darf das Vektorpotential nicht von z abhängen. Ferner dürfen die Komponenten A_φ, A_z und A_r nicht von φ abhängen. Setzen deshalb o.B.d.A den Beobachtungspunkt $\vec{r} = x\vec{e}_x$. Das Vektorpotential $\vec{A}$ ist dort gegeben durch

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int\limits_V \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\ dV = \frac{\mu_0 j_0}{4\pi} \cdot \int\limits_{r'<1} \frac{(1 - r'^2)}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\ dV \cdot \vec{e}_z$$

Somit ist $\vec{A}(\vec{r}) = A(r)\vec{e}_z$ und ferner

$$\vec{B}(\vec{r}) = \operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r}) = -\frac{\partial A}{\partial r} \vec{e}_\varphi$$

Durch die Poissongleichung

$$\Delta \vec{A}(\vec{r}) = \Delta \left[A(r)\vec{e}_z\right] = \left[\Delta A(r)\right] \vec{e}_z = -\mu_0 \vec{j}(\vec{r}) = -\mu_0 j(r) \vec{e}_z$$

erhält man die DGL

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dA}{dr}\right) = -\mu_0 j(r) = -\mu_0 j_0 (1 - r^2)\Theta(1 - |r|)$$

Diese wäre zunächst in den beiden Teilbereichen $r < 1$ und $r > 1$ separat zu lösen.

- **Für r>1:**

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dA}{dr}\right) = 0 \ \rightarrow\ A(r) = C_0 \ln r + C_1\ ,\ C_0, C_1 \in \mathbb{R}$$

- **Für r<1:**

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dA}{dr}\right) = -\mu_0 j_0 (1 - r^2)\ \rightarrow\ r\frac{dA}{dr} = -\mu_0 j_0 \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right) + B_0\ \rightarrow\ A(r) = -\mu_0 j_0 \left(\frac{r^2}{4} - \frac{r^4}{16}\right) + B_0 \ln r + B_1$$

Fordern wir dass das Vektorpotential auch im Ursprung endlich ist, muss $B_0 = 0$ sein. Wir erhalten mit der Stetigkeitsbedingung bei $r = 1$:

$$\lim_{r\to 1^-} A(r) \overset{!}{=} \lim_{r\to 1^+} A(r)\ \rightarrow\ C_1 = -\mu_0 j_0 \frac{3}{16} + B_1$$

Ferner erwarten wir wegen der Stetigkeit von $\vec{B}$ auch die Stetigkeit der Ableitung von A, also

$$\lim_{r\to 1^-} A'(r) \overset{!}{=} \lim_{r\to 1^+} A'(r)\ \rightarrow\ C_0 = -\frac{3\mu_0 j_0}{8}$$

Da $\vec{A}$ eigentlich bis auf ein Gradientenfeld nicht eindeutig bestimmt ist, wählen wir o.B.d.A $B_1 = 0$, so dass wir schließlich das Vektorpotential erhalten:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \begin{cases} \left[-\frac{3\mu_0 j_0}{8} \ln r - \mu_0 j_0 \frac{3}{16}\right] \cdot \vec{e}_z & : r > 1 \\ -\mu_0 j_0 \left(\frac{r^2}{4} - \frac{r^4}{16}\right) \cdot \vec{e}_z & : r \leq 1 \end{cases}$$

b) Das Magnetfeld ist somit gegeben durch

$$\vec{B}(\vec{r}) = -A'(r)\vec{e}_\varphi = \begin{cases} \dfrac{3\mu_0 j_0}{8r} \cdot \vec{e}_\varphi & : r > 1 \\ \mu_0 j_0 \left(\dfrac{r}{2} - \dfrac{r^3}{4}\right) \cdot \vec{e}_\varphi & : r \leq 1 \end{cases}$$

c) Die magnetostatische Energiedichte im Raum ist gegeben durch

$$w = \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \begin{cases} \dfrac{9 j_0^2 \mu_0}{64 r^2} & : r > 1 \\ \dfrac{j_0^2 \mu_0}{2} \left(\dfrac{r}{2} - \dfrac{r^3}{4}\right)^2 & : r \leq 1 \end{cases}$$

Bemerke: Einheiten stimmten schon in Aufgabenstellung nicht! → SISO Prinzip!

Aufgabe 06

a) Betrachten zunächst das aus dem Strom I_1 resultierende Magnetfeld $\vec{B}_1$, und verwenden Zylinderkoordinaten mit dem Leiter L_1 als z-Achse. Aufgrund von Symmetriegründen hängt das Feld $\vec{B}_1$ nicht von der z Koordinate ab. Aus dem gleichen Grund darf auch die φ Koordinate nicht von φ abhängen. Am Biot-Savartschen Gesetz

$$d\vec{B} \sim \frac{\vec{j} \times \vec{r}}{|\vec{r}|}$$

ist zu sehen dass das $\vec{B}$ Feld immer senkrecht zum erzeugenden Strom und zur Verbindungslinie zwischen Strom und Beobachtungspunkt steht. Da im Leiter L_1 allgemein $\vec{j} \parallel \vec{e}_z$ ist, muss $\vec{B}_1 \parallel \vec{e}_\varphi$ sein, also: $\vec{B}_1(\vec{r}) = B(r)\vec{e}_\varphi$. Im stationären Fall gilt

$$\operatorname{rot} \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{j}(\vec{r})$$

so dass man für eine symmetrisch um die z-Achse liegende Kreisfläche K_R mit dem Radius R schreiben kann:

$$2\pi R B(r = R) = \int\limits_{\partial K_R} \vec{B}\ d\vec{s} = \int\limits_{K_R} \operatorname{rot} \vec{B}\ d\vec{A} = \mu_0 \int\limits_{K_R} \vec{j}\ d\vec{A} = \mu_0 I_1 \ \rightarrow\ B(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} \vec{e}_\varphi$$

Der magnetische Fluss von $\vec{B}_1$ durch die Fläche A der zweiten Leiterschleife ist somit:

$$\Phi_2 = \int\limits_A \vec{B}_1(\vec{r})\ d\vec{A} = \int\limits_0^a \int\limits_0^b B(h+x)\vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_y\ dx\ dz = \frac{\mu_0 I_1 a}{2\pi} \int\limits_0^b \frac{dz}{h+x} = \frac{\mu_0 I_1 a}{2\pi} \ln\left[\frac{h+b}{h}\right]$$

b) Der Gegeninduktionskoeffizient L_{12} somit definitionsemäß gegeben durch

$$\Phi_2 = L_{12} I_1 \ \rightarrow\ L_{12} = \frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln\left[\frac{h+b}{h}\right]$$

Aufgabe 07

a) Nach dem Kirchhoffschen Knotensatz ist die netto Summe aller in und aus einem Leiterknoten fließenden Ströme gleich 0:

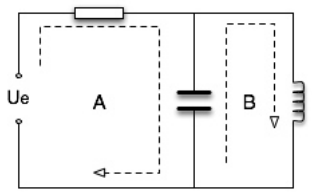
$$\sum_i I_i = 0$$

insofern sich die Gesamtladung im Knoten nicht ändert ($\dot{Q} = 0$). Nach dem Maschensatz ist die algebraische Summe aller Spannungsabfälle an Bauelementen innerhalb eines Stromkreises gleich der Summe der induzierten und externen Spannungen:

$$\int_S \vec{E}\, d\vec{r} = U_{ind} + U_e = -\frac{d}{dt}\Phi + U_e$$

Letzterer gilt nur im Idealfall dünner Leiter.

b) Seien U_R und U_C der Spannungsabfall am Widerstand bzw. Kondensator bzgl. der Drehrichtung A und U_L die in L induzierte Spannung bzgl. der Drehrichtung B.



Seien außerdem I_R, I_C, I_L die entsprechenden Ströme. Es gilt:

$$U_R = I_R R\ ,\ U_C = \frac{Q_C}{C}\ ,\ U_L = -L\frac{dI_L}{dt}$$

Durch die Maschenregel erhält man für A:

$$I_R R + U_C = U_e \quad (a)$$

und B:

$$-U_C = -\frac{Q_C}{C} = -L\frac{dI_L}{dt} \quad (b)$$

Durch die Knotenregel erhält man ferner

$$I_R = \underbrace{I_C}_{C\dot{U}_C} + I_L \quad (c)$$

Durch Differenzieren erhält man:

$$(a) \ \rightarrow\ \dot{I}_R R + \dot{U}_c = \dot{U}_e$$

$$(c) \ \rightarrow\ \dot{I}_R = C\ddot{U}_C + \dot{I}_L$$

$$\rightarrow\ \left(C\ddot{U}_C + \dot{I}_L\right) R + \dot{U}_C = \dot{U}_e$$

$$(b) \ \rightarrow\ \left(C\ddot{U}_C + \frac{U_C}{L}\right) R + \dot{U}_C = CR\ddot{U}_C + \dot{U}_C + \frac{R}{L}U_C = \dot{U}_e$$

$$\rightarrow\ \ddot{U}_C + \frac{1}{RC}\dot{U}_C + \frac{1}{LC}U_C = \frac{1}{RC}\dot{U}_e$$

Letztere stellt genau die gesuchte Differentialgleichung für U_C dar. Suchen jetzt diejenige Erregerfrequenz ω_r von

$$U_e = U_0 e^{i\omega t}$$

bei der die (gegebenfalls) resultierende Schwingung eine maximale Amplitude hat! Machen dazu den Lösungsansatz

$$U_C(t) = \mathcal{U}_0 e^{i\omega t}$$

und gehen damit in die DGL ein:

$$\left[-\omega^2 + \frac{i\omega}{RC} + \frac{1}{LC}\right]\mathcal{U}_0 e^{i\omega t} = \frac{i\omega}{RC} U_0 e^{i\omega t}$$

$$\rightarrow\ \mathcal{U}_0 = \frac{i\omega U_0}{RC\left[-\omega^2 + \frac{i\omega}{RC} + \frac{1}{LC}\right]} = \frac{U_0 e^{i\vartheta}}{RC\sqrt{\left(\omega - \frac{1}{\omega LC}\right)^2 + \frac{1}{R^2C^2}}}\ ,\ \vartheta = \arctan\left(\frac{R}{\omega L} - \omega RC\right)$$

Suchen also genau die Frequenz ω_r für die

$$|\mathcal{U}_0| \sim \frac{1}{\sqrt{\left(\omega - \frac{1}{\omega LC}\right)^2 + \frac{1}{R^2C^2}}}$$

maximal, bzw.

$$f(\omega) := \left(\omega - \frac{1}{\omega LC}\right)^2$$

minimal wird. Dies ist genau für

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

der Fall, so dass dies auch die Resonanzfrequenz für U_C darstellt!

Aufgabe 08

a) Mit der externen Stromdichte $\vec{j}(\vec{r},t)$ und Ladungsdichte $\rho(\vec{r},t)$ lauten die Maxwellgleichungen:

$$\operatorname{rot}\vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}(\vec{r},t) \qquad \operatorname{div}\vec{D}(\vec{r},t) = \rho(\vec{r},t)$$

$$\operatorname{rot}\vec{H}(\vec{r},t) = \vec{j}(\vec{r},t) + \frac{\partial}{\partial t}\vec{D}(\vec{r},t) \qquad \operatorname{div}\vec{B}(\vec{r},t) = 0$$

b) Wegen $\operatorname{rot}\vec{B}(\vec{r},t) = 0$ kann man das Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r},t)$ einführen:

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \operatorname{rot}\vec{A}(\vec{r},t)\ \leftrightarrow\ \operatorname{div}\vec{B}(\vec{r},t) = 0$$

Eingesetzt in die 1. Maxwellgleichung ergibt

$$\operatorname{rot}\vec{E}(\vec{r},t) + \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec{A}(\vec{r},t) = \operatorname{rot}\left[\vec{E}(\vec{r},t) + \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}(\vec{r},t)\right] = 0$$

Somit kann man ein skalares Potential $\Phi(\vec{r},t)$ einführen für das gilt:

$$\vec{E}(\vec{r},t) + \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}(\vec{r},t) = -\operatorname{grad}\Phi(\vec{r},t)\ \leftrightarrow\ \operatorname{rot}\vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}(\vec{r},t)$$

c) Betrachten eine beliebige Transformation

$$\vec{A}'(\vec{r},t) := \vec{A} + \vec{\Gamma}(\vec{r},t)\ ,\ \Phi'(\vec{r},t) := \Phi(\vec{r},t) + \Omega(\vec{r},t)$$

für die das $\vec{B}$-Feld erhalten bleibt, d.h

$$\operatorname{rot}\vec{A}'(\vec{r},t) = \operatorname{rot}\vec{A}(\vec{r},t) + \operatorname{rot}\vec{\Gamma}(\vec{r},t) \overset{!}{=} \operatorname{rot}\vec{A}(\vec{r},t)\ \leftrightarrow\ \operatorname{rot}\vec{\Gamma}(\vec{r},t) = 0$$

$\vec{\Gamma}$ muss also ein Gradientenfeld sein, d.h

$$\vec{A}'(\vec{r},t) = \vec{A}(\vec{r},t) + \operatorname{grad}\Psi(\vec{r},t)$$

Außerdem muss aber noch das $\vec{E}$-Feld erhalten bleiben, d.h

$$-\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}'(\vec{r},t) - \operatorname{grad}\Phi'(\vec{r},t) = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}(\vec{r},t) - \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{grad}\Psi(\vec{r},t) - \operatorname{grad}\Phi(\vec{r},t) - \operatorname{grad}\Omega(\vec{r},t) \stackrel{!}{=} -\frac{\partial}{\partial t}\vec{A} - \operatorname{grad}\Phi(\vec{r},t)$$

$$\leftrightarrow\ \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{grad}\Psi(\vec{r},t) + \operatorname{grad}\Omega(\vec{r},t) = 0\ \leftrightarrow\ \Omega(\vec{r},t) = -\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{r},t)$$

Somit sind die beiden Transformationen gekoppelt, gemäß

$$\Phi'(\vec{r},t) = \Phi(\vec{r},t) - \frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{r},t)$$

Aufgabe 09

a) Beginnen mit

$$\operatorname{rot}\vec{H}(\vec{r},t) = \vec{j}(\vec{r},t) + \frac{\partial}{\partial t}\vec{D}(\vec{r},t)\ ,\ \operatorname{div}\vec{D}(\vec{r},t) = \rho(\vec{r},t)$$

und schreiben

$$0 = \operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{H}(\vec{r},t) = \operatorname{div}\vec{j}(\vec{r},t) + \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\vec{D}(\vec{r},t) = \operatorname{div}\vec{j}(\vec{r},t) + \frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r},t)$$

b) Setzen $\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H}$ und schreiben

$$\operatorname{div}\vec{S} = \vec{H}\cdot\operatorname{rot}\vec{E} - \vec{E}\cdot\operatorname{rot}\vec{H} = -\vec{H}\cdot\dot{\vec{B}} - \vec{E}\cdot\left(\vec{j} + \dot{\vec{D}}\right) = -\left[\frac{1}{\mu_0}\vec{B}\cdot\dot{\vec{B}} + \varepsilon_0\vec{E}\cdot\dot{\vec{E}}\right] - \vec{j}\cdot\vec{E}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2 + \frac{\varepsilon_0}{2}\vec{E}^2\right] - \vec{j}\cdot\vec{E} = -\frac{\partial w_e}{\partial t} - \vec{j}\cdot\vec{E}\quad\square$$

wobei w_e genau die elektromagnetische Energiedichte ist. $\vec{j}\cdot\vec{E}$ ist die an die Ladungen errichtet Arbeit, und somit die kinetische Energiedichteänderung. Somit liegt es nahe den Poynting-Vektor $\vec{S}$ als Energieflussdichte zu interpretieren.

Aufgabe 10

Für den Ladungsfreien Raum ($\vec{j} = \rho = 0$) ergeben sich die Potentialgleichungen unter der Coulomb-Eichung als

$$\Delta\Phi(\vec{r},t) = 0\ ,\ \Delta\vec{A}(\vec{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A}(\vec{r},t) = 0$$

Die Felder sind dann gegeben durch

$$\vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}(\vec{r},t)\ ,\ \vec{B}(\vec{r},t) = \operatorname{rot}\vec{A}(\vec{r},t)$$

Alternativ, ergibt sich die Wellengleichungen direkt aus direkt aus den Maxwellgleichungen:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E}(\vec{r},t) = \operatorname{grad}\underbrace{\operatorname{div}\vec{E}(\vec{r},t)}_{0} - \Delta\vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec{B}(\vec{r},t) = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E}(\vec{r},t)\ \rightarrow\ \Delta\vec{E}(\vec{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E}(\vec{r},t) = 0$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{B}(\vec{r},t) = \operatorname{grad}\underbrace{\operatorname{div}\vec{B}(\vec{r},t)}_{0} - \Delta\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{B}(\vec{r},t)\ \rightarrow\ \Delta\vec{B}(\vec{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{B}(\vec{r},t) = 0\quad\square$$

Ebene Wellen:
Machen den Ansatz

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \vec{a}e^{i\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right)}$$

gehen damit in die DGL ein:

$$\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} = \sum_j \vec{a}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} - \frac{\vec{a}}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} = \sum_j \vec{a}(-ik_j)^2 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} - \frac{(i\omega)^2}{c^2}\vec{A}$$

$$= -k^2\vec{A} + \frac{\omega^2}{c^2}\vec{A} \stackrel{!}{=} 0 \;\leftrightarrow\; k^2 = \frac{\omega^2}{k^2}$$

und sehen dass für $k^2 = \frac{\omega^2}{k^2}$ (Dispersionsrelation) die DGL erfüllt ist! Somit sind ebene Wellen Lösungen der Potentialgleichungen. Das $\vec{E}$-Feld ist gegeben durch

$$\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{A} = -i\omega\vec{a}e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$$

und stellt somit auch eine ebene Welle dar. Wegen $\operatorname{div}\vec{E} = 0$ folgt

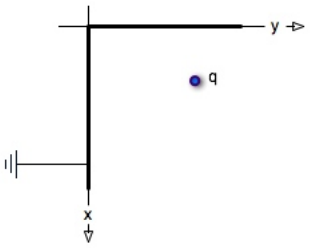
$$0 = \operatorname{div}\vec{E} = -i\omega\sum_j a_j\frac{\partial}{\partial x_j}e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} = -i\omega\sum_j a_j(-ik_j)e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} = -\omega\vec{a}\cdot\vec{k}e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \;\rightarrow\; \vec{k}\cdot\vec{E} = 0$$

$$\rightarrow\; \vec{k} \perp \vec{E}$$

und somit die Transversalität der Welle. $\square$

Aufgabe 11

Die Ebenen seien o.B.d.A die XZ und die YZ Ebenen, und die Punktladung befinde sich o.B.d.A in $\vec{r}_q = x_q\vec{e}_x + y_q\vec{e}_y$. Die Ebenen teilen den Raum automatisch in zwei Teilräume V_q, V_v auf, wobei V_q der Raum sei in dem sich die Ladung q befinde.



Das Potential $\Phi(\vec{r}, t)$ ist durch die Randbedingungen

$$\Phi(x = x0) = \Phi(y = 0) = 0$$

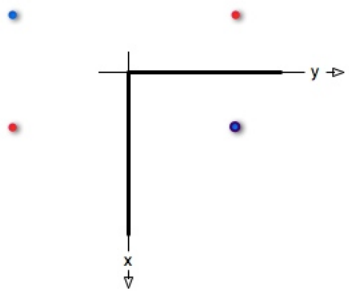
eindeutig bestimmt. Es genügt also irgendeine Lösung zu finden die die Poissongleichung

$$\Delta\Phi(\vec{r}) = q\delta(\vec{r} - \vec{r}_q)$$

und die Randbedingungen erfüllt. In V_v ist das Potential trivialerweise gegeben durch $\Phi(\vec{r}) = 0$, und wir beschäftigen uns deshalb nur mit V_q. Betrachten dazu das Feld das durch 4 Ladungen $q_0 = q, q_1 = -q, q_2 = -q, q_3 = q$ an den Stellen

$$\vec{r}_0 = \vec{r}_q,\ ,\ \vec{r}_1 = x_q\vec{e}_x - y_q\vec{e}_y\ ,\ \vec{r}_2 = -x_q\vec{e}_x + y_q\vec{e}_y\ ,\ \vec{r}_3 = -x_q\vec{e}_x - y_q\vec{e}_y$$

erzeugt wird.



Dieses ist gegeben durch

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} - \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|} - \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_2|} + \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_3|}\right]$$

Es ist leicht zu erkennen dass Φ die Poissongleichung in V_q erfüllt:

$$\Delta\Phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\Delta\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} = q\delta(\vec{r}-\vec{r}_q)$$

Aus der Graphik ist außerdem leicht zu erkennen dass die XZ und YZ Ebenen Äquipotentialflächen sind, mit dem Potential $\Phi_0 = 0$. Somit stellt Φ genau die gesuchte Lösung für das Dirichletsche Randwertproblem dar. $\square$