Institut für Angewandte Physik
Friedrich-Schiller Universität Jena

Elektrodynamik-Klausur, SS 2007

Aufgabe 1:
Eine homogen geladene Kugel (Radius R, Ladungsdichte ρ befinde sich im Vakuum.
Berechnen Sie:

1. das elektrische Feld im gesamten Raum (4 Punkte)

2. das elektrostatische Potential und (3 Punkte)

3. die elektrostatische Energie. (3 Punkte)

4. Drei Ladungen Q sind im Abstand a auf der x-Achse symmetrisch zum Ursprung angeordnet. Wie groß ist die in der Anordnung gespeicherte Energie? (3 Punkte)
   Hinweis: Für kugelsymmetrische Probleme gilt:
$$\Delta\phi = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right)\phi$$

Aufgabe 2:
Das elektrostatische Potential einer beliebigen, jedoch eng begrenzten Ladungsverteilung im Ursprung werde in genügend großem Abstand in guter Näherung durch die ersten beiden Terme einer Multipolentwicklung beschrieben.

1. Geben Sie das Potential dieser Multipolentwicklung an. Interpretieren Sie die beiden Terme. (3 Punkte)

2. Geben Sie den Zusammenhang zwischen den auftretenden Momenten und der Ladungsverteilung an. (2 Punkte)

3. Das Potential eines Dipols im Abstand $\vec{a}$ vor einer leitenden und geerdeten Kugel mit dem Radius R ist:
$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{\vec{d}\cdot(\vec{r}-\vec{a})}{|\vec{r}-\vec{a}|^3} - \frac{R}{r}\frac{\vec{d}\cdot[(\frac{R}{r})^2\vec{r}-\vec{a}]}{|(\frac{R}{r})^2\vec{r}-\vec{a}|^3}\right)$$
   Wie groß ist die induzierte Ladung? Hinweis: Bei geeigneter Multiplikation des Potentials mit einer bestimmten Potenz von r und anschließendem Grenzübergang $r \to \infty$ verschwinden alle höheren Terme der Multipolentwicklung. (2 Punkte)

Aufgabe 3:
In der Elektrostatik ist der Zusammenhang zwischen dem Potential und einer beliebigen Ladungsverteilung durch die Green'sche Funktion gegeben.
$$G(\vec{r},\vec{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + f(\vec{r},\vec{r}') \qquad \text{mit} \qquad \Delta G(\vec{r},\vec{r}') = -\frac{\delta(\vec{r}-\vec{r}')}{\epsilon_0}$$

1. Zeigen Sie unter Verwendung der zweiten Green'schen Identität, dass $\phi(\vec{r})$ aus einem Volumenintegral über die $G(\vec{r},\vec{r}')$ und die Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ berechnet werden kann.
   (3 Punkte) Hinweis (*2. Green'sche Identität*):
$$\int_V d^3r'\,(\psi\Delta\phi - \phi\Delta\psi) = \int_{(V)} df'\left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial n'} - \psi\frac{\partial\phi}{\partial n'}\right).$$

2. Diskutieren Sie, welche Rolle der Integralterm auf der Oberfläche bezüglich der Eindeutigkeit der Green'schen Funktion spielt. Ordnen sie den auftretenden Termen die Dirichlet'schen bzw. Neumann'schen Randbedingungen zu. (2 Punkte)

3. Welche Eigenschaften muss $f(\vec{r},\vec{r}')$ für diese beiden Arten von Randbedingungen erfüllen und ... Rolle spielen die natürlichen Randbedingungen im Formalismus der Green'schen Funktion? (2 Pun...

√ **Aufgabe 4:**
Leiten Sie die Übergangsbedingungen für die $\vec{E}$- und $\vec{D}$- Felder an einer Grenzfläche zwischen zwei Medien mit unterschiedlicher Dielektrizitätskonstante ε her. Dabei sollen keine externen Grenzflächenladungen vorhanden sein. Illustrieren Sie Ihre Ableitung mit Skizzen. (6 Punkte)

Aufgabe 5:
Ein Strahl geladener Teilchen befinde sich im Vakuum und folge einer parabolischen Geschwindigkeitsverteilung, die die Stromdichte $\vec{j}(r) = j_0(1-r^2)\Theta(1-|r|)\vec{e}_z$, $r = x^2+y^2$ hervorruft.
Berechnen Sie:

1. das Vektorpotential $\vec{A}(r)$ im gesamten Raum. Beachten Sie: $A(r\to\infty) \sim \ln(r)$. (4 Punkte)
2. Das magnetische Feld $\vec{B}(r)$ (3 Punkte)
3. und die magnetostatische Energiedichte $w_{mag}(r)$ im gesamten Raum. (3 Punkte)

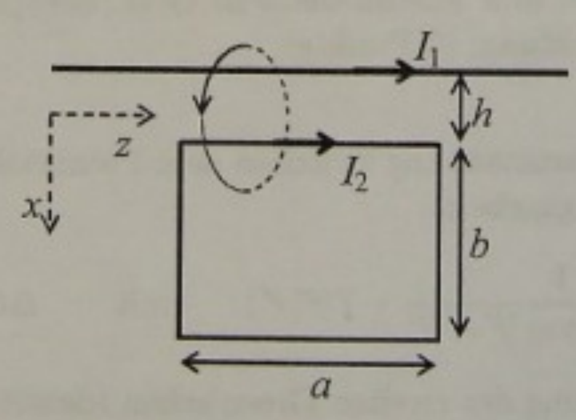
Hinweis: Für zylindersymmetrische Probleme gilt:

$$\nabla \times \vec{V} = -\frac{\partial V_z}{\partial r}\vec{e_\varphi} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_r)\vec{e_z}$$

$$\triangle\phi = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\right)\phi \quad ?$$

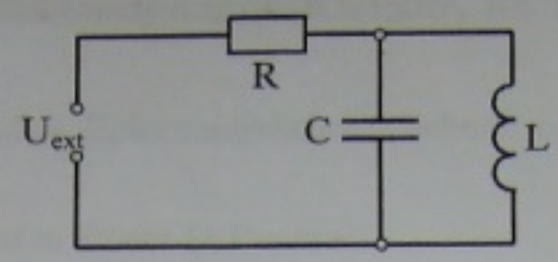
Aufgabe 6:
Eine rechteckige Leiterschleife (Länge a, Breite b), bestehend aus einem dünnen Draht, in dem ein Strom I_2 fließt, befindet sich im Magnetfeld eines dünnen, unendlich langen vom Strom I_1 durchflossenen Drahtes. Der Abstand vom Draht zur Leiterschleife sei h. (siehe Abbildung)

1. Bestimmen Sie den durch I_1 in der Leiterschleife induzierten magnetischen Fluss. (6 Punkte)
2. Berechnen Sie unter Zuhilfenahme des Ergebnisses aus a) den Gegeninduktionskoeffizienten L_{12}. (2 Punkte)



Aufgabe 7:

1. Erläutern Sie die beiden Kirchhoffschen Regeln (Maschen- und Knotensatz) und geben Sie die notwendigen Voraussetzungen für deren Gültigkeit an. (4 Punkte)
2. Betrachten Sie nun den unten abgebildeten Schwingkreis. Leiten Sie für die Differentialgleichung zur Beschreibung der Spannung über dem Kondensator aus den Kirchhoffschen Maschen- und Knotensätzen ab. Bestimmen Sie die Resonanzfrequenz dieser Spannung. (5 Punkte)



Aufgabe 8:

1. Schreiben Sie das vollständige System der inhomogenen Maxwellschen Gleichungen in differentieller und integraler Form im Medium (Stromdichte $\vec{j}$, Ladungsdichte ρ) auf! (2 Punkte)

2. Führen Sie skalares und Vektorpotential für Vakuum ein und zeigen Sie, dass sie mit den Maxwell-Gleichungen verträglich sind. (3 Punkte)

3. Leiten Sie Eichtransformationen ab, die die elektromagnetischen Felder invariant lassen? (2 Punkte)

Aufgabe 9:
Leiten Sie aus den Maxwellschen Gleichungen im Vakuum (Stromdichte $\vec{j}$, Ladungsdichte ρ)

1. die Kontinuitätsgleichung und (2 Punkte)

2. die Energiebilanz (Poyntingscher Satz) ab. Interpretieren Sie die auftretenden Größen. (4 Punkte)

Aufgabe 10:
Geben Sie für den ladungs- und stromfreien Raum (Vakuum) die Gleichungen für die Potentiale entweder für Lorentz-oder Coulomb-Eichung an. Leiten Sie die Wellengleichung für das elektrische Feld aus den Maxwell-Gleichungen ab. (4 Punkte)

1. Zeigen Sie für eine der Varianten, dass transversale ebene Wellen Lösungen für das elektrische Feld sind und zeigen Sie die notwendigkeit der Transversalität (4 Punkte)

2. Zeigen Sie, dass diese Lösungen einer Dispersionsrelation genügen müssen. (3 Punkte)

Aufgabe 11:
Eine Punktladung q befinde sich zwischen 2 geerdeten, leitenden Ebenen, die sich unter einem Winkel $\alpha = 90°$ schneiden. Geben Sie das Potential im gesamten Raum an. (4 Punkte)

Viel Erfolg!