Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie 2008/09

14. Serie

1. Für $a, b > 0$ definiert man die unvollständige Betafunktion $B_{a,b}$ durch

$$B_{a,b}(x) := \int_0^x t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,\mathrm{d}t\,, \quad 0 \le x \le 1\,.$$

Man beachte, dass mit der Eulerschen Betafunktion B die Aussage $B_{a,b}(1) = B(a,b)$ gilt. Zeigen Sie, dass für $0 \le p \le 1$ und $k \in \{1,\ldots,n\}$ die Identität

$$\sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} = k\binom{n}{k} B_{k,n-k+1}(p) \tag{1}$$

besteht.
Hinweis: Leiten Sie die linke Seite von (1) nach p ab.

2. Es seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige, identisch verteilte zufällige Größen mit Verteilungsdichte p und Verteilungsfunktion F. Die zufälligen Größen $Y_1, \ldots, Y_n$ werden dann durch die Eigenschaften $Y_1(\omega) \le \cdots \le Y_n(\omega)$ und $\{Y_1(\omega), \ldots, Y_n(\omega)\} = \{X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)\}$, $\omega \in \Omega$, definiert. Mit anderen Worten, die Y_j erhält man, indem man die X_i der Größe nach ordnet (Ordnungsstatistik).

   (a) Man zeige, dass die Y_k für $1 \le k \le n$ die Verteilungsfunktion

   $$F_k(x) = \mathbb{P}(Y_k \le x) = k\binom{n}{k} \int_0^{F(x)} t^{k-1}(1-t)^{n-k}\,\mathrm{d}t$$

   und die Verteilungsdichte

   $$p_k(x) = k\binom{n}{k} p(x) F(x)^{k-1}(1-F(x))^{n-k}$$

   besitzen.

   (b) Ist $n = 2m+1$, so nennt man Y_{m+1} den Median von $X_1, \ldots, X_{2m+1}$. Welche Verteilungsfunktion und welche Verteilungsdichte besitzt der Median ?

   (c) Wie sieht die Verteilung der Y_k aus, wenn $X_1, \ldots, X_n$ auf $[0,1]$ gleichverteilt sind ? Man berechne $\mathbb{E}Y_k$ in diesem Fall.

3. Ein Mann habe in seiner Tasche N unterschiedliche Schlüssel, von denen nur einer zum Schloss passt. Er probiert nun nacheinander zufällig gewählte Schlüssel aus. Passt ein Schlüssel nicht, wird er zur Seite gelegt und ein neuer Schlüssel gewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau der k–te Schlüssel der Gesuchte ist ? Welche Wahrscheinlichkeit hat das Ereignis, genau im k–ten Versuch erstmals den richtigen Schlüssel zu haben, wenn nach jedem missglückten Versuch der falsche Schlüssel wieder zu den restlichen $N-1$ Schlüsseln zurück gelegt wird ?

Abgabe: Am 12.02.09 oder am 13.02.09 in der Übungszeit.