Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie 2008/09

13. Serie

1. Beweisen Sie folgende Aussage: Es sei $\vec{Y}$ ein n–dimensionaler Vektor, der gemäß $\mathcal{N}(a, R)$ verteilt ist. Dann existieren eine orthonormale Basis $(f_j)_{j=1}^n$ in $\mathbb{R}^n$ und positive Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ mit
$$\vec{Y} = \sum_{j=1}^{n} \left[\lambda_j \xi_j + \langle a, f_j \rangle\right] f_j \ . \tag{1}$$
Hierbei seien die ξ_j unabhängige $\mathcal{N}(0,1)$–verteilte zufällige Größen.
Wie berechnen sich die λ_j und die orthonormale Basis aus der Kovarianzmatrix R?
Wie sieht Darstellung (1) für den zufälligen Vektor $(X_1 + X_2, X_1 - X_2)$ mit X_1, X_2 standardnormalverteilt und unabhängig aus ?

2. Gegeben seien drei unabhängige, standardnormalverteilte zufällige Größen X_1, X_2 und X_3. Man bilde mit diesen den zufälligen Vektor
$$\vec{Y} := (X_1 - 1, X_1 + X_2 + 2, X_1 + X_2 + X_3 + 1) \ .$$
   (a) Zeigen Sie, dass $\vec{Y}$ normalverteilt ist und bestimmen Sie die Kovarianzmatrix des Vektors.
   (b) Geben Sie die Verteilungsdichte von $\vec{Y}$ an.

3. Der n–dimensionale Vektor $\vec{Y}$ sei gemäß $\mathcal{N}(a, R)$ verteilt.
   (a) Für eine reguläre $n \times n$–Matrix S sei $\vec{Z} := S\vec{Y}$. Welche Verteilung hat der Vektor $\vec{Z}$?
   (b) Es sei $b \neq 0$ ein n–dimensionaler Vektor. Die zufällige Größe Z werde dann durch $Z := \langle \vec{Y}, b \rangle$ definiert. Welches Verteilungsgesetz hat Z ?

4. In einer Urne befinden sich weiße und schwarze Kugeln in einem unbekannten Verhältnis. Um Aussagen über den Anteil der weißen Kugeln zu erhalten, entnehme man nacheinander n Kugeln mit Zurücklegen. Als Ergebnis des statistischen Versuchs registriere man die Zahl der dabei gezogenen weißen Kugeln.
   (a) Geben Sie den dieses Experiment beschreibenden statistischen Raum in Parameterform an.
   (b) Sei $0 \leq k \leq n$ die Anzahl der gezogenen weißen Kugeln. Welche Schätzung für den Anteil q der weißen Kugeln würden Sie daraus ableiten ?
   Hinweis: Bei beobachtetem k nehme man als Schätzung für q diejenige Zahl $\hat{q}(k)$ für die die Wahrscheinlichkeit des Eintretens des Ereignisses k maximal wird.

Abgabe: Am 05.02.09 oder am 06.02.09 in der Übungszeit.