Testklausur, Serie 12

Abgabe: Am 29.01.09 oder am 30.01.09 in der Übungszeit

1. Für eine zufällige Größe X gelte $\mathbb{P}(X \leq t) = 0$ für $t \leq 0$ und $\mathbb{P}(X \leq t) = 1 - (1 + \lambda t)\, \mathrm{e}^{-\lambda t}$ für $t > 0$. 3 P
   (a) Bestimmen Sie die Verteilungsdichte von X.
   (b) Berechnen Sie $\mathbb{P}(-1 \leq X \leq 1)$.

2. Für eine auf $[0, 1]$ gleichverteilte zufällige Größe U berechne man die Verteilungsdichte von U^2 sowie den Erwartungswert $\mathbb{E}\, U^2$. 3 P

3. Gegeben seien ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ und ein Ereignis $A \in \mathcal{A}$. Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz der zufälligen Größe $\mathbf{1}_A$. Dabei bezeichnet $\mathbf{1}_A$ die auf Ω definierte Indikatorfunktion der Menge A, d.h. $\mathbf{1}_A(\omega) = 1$, falls $\omega \in A$, und $\mathbf{1}_A(\omega) = 0$ für $\omega \notin A$. Für eine zweite Menge $B \in \mathcal{A}$ bestimme man $\operatorname{cov}(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B)$. 3 P

4. Die Zufallsgrößen X und Y seien unabhängig und Poisson–verteilt mit Parameter $\lambda > 0$. Bestimmen Sie für $k,\ l \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, \ldots\}$ die Wahrscheinlichkeit[1] 3 P
$$\mathbb{P}(X = k \,|\, X + Y = l)\ .$$

5. Die Lebensdauer eines Bauteils sei exponentiell verteilt mit Parameter $\lambda > 0$. Man nehme $n \geq 1$ dieser Bauteile gleichzeitig in Betrieb und setze voraus, dass die Bauteile unabhängig voneinander ausfallen. 3 P
   (a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Zeitintervall $[0, T]$ genau $k \leq n$ der Bauteile ausfallen.
   (b) Wie groß ist die durchschnittliche Zahl der Ausfälle im Zeitintervall $[0, T]$? Begründen Sie Ihre Antwort.

6. Von 4 gegebenen Münzen seien drei unverfälscht und eine verfälscht, und zwar so, dass Kopf mit Wahrscheinlichkeit 1/3 und Zahl mit Wahrscheinlichkeit 2/3 erscheinen. Die Münzen sind äußerlich nicht unterscheidbar. Man nehme nun zufällig (gemäß der Gleichverteilung) eine der 4 Münzen und werfe diese. 4 P
   (a) Geben Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum an, der diesen Versuch beschreibt.
   (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei diesem Versuch “Kopf“ zu beobachten?
   (c) Angenommen, beim Wurf ist “Kopf“ ist erschienen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die geworfene Münze die verfälschte war ?

Bestanden ist die Klausur ab (einschließlich) 10,0 Punkten. Σ 19 P

[1] Sie können die aus der Vorlesung bekannte Aussage über die Verteilung der Summe von zwei unabhängigen Poisson–verteilten zufälligen Größen ohne Beweis verwenden.