Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie 2008/09

11. Serie

1. Gegeben seien zwei unabhängige zufällige Größen X und Y mit Verteilungsdichten p und q sowie $\mathbb{P}(Y > 0) = 1$. Zeigen Sie, dass dann $Z := X/Y$ die Verteilungsdichte r mit
$$r(y) := \int_0^\infty x \cdot p(x\,y) \cdot q(x)\ \mathrm{d}x\ , \quad y \in \mathbb{R}\,,$$
besitzt.

2. Eine Maschine bestehe aus n Teilen, die unabhängig voneinander ausfallen und deren Überlebenswahrscheinlichkeiten durch $\bar{F}_1(t), \ldots, \bar{F}_n(t)$ gegeben seien. Die Maschine fällt aus, wenn wenigstens ein Teil defekt ist.
   (a) Drücken Sie die Lebensdauerverteilung der Maschine durch die der einzelnen Teile aus.
   (b) Berechnen Sie die Ausfallrate der Maschine mit Hilfe der Ausfallraten der einzelnen Teile.
   (c) Bestimmen Sie Lebensdauerverteilung und Ausfallrate für den Fall, dass die Lebensdauer der Einzelteile exponentiell (nicht notwendig mit dem selben Parameter) verteilt ist.

3. Die Lebensdauer zweier Maschinen sei unabhängig und werde durch die Überlebenswahrscheinlichkeiten $\bar{F}_1(t)$ und $\bar{F}_2(t)$ mit zugehörigen Wahrscheinlichkeitsdichten p_1 und p_2 beschrieben.
   (a) Beweisen Sie, dass sich die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die erste Maschine mindestens noch t Zeiteinheiten nach dem Ausfall der zweiten Maschine arbeitet, durch
$$\int_0^\infty \bar{F}_1(t+y)p_2(y)dy$$
berechnet.
   (b) Wie erhält man die mittlere Nocharbeitszeit der ersten Maschine nach dem Ausfall der zweiten Maschine ?
   Hinweis: Beachten Sie, dass die Nocharbeitszeit Null ist, sofern die erste Maschine vor der zweiten ausfällt.

4. Zeigen Sie mit Hilfe des Zentralen Grenzwertsatzes, dass
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-n} = \frac{1}{2} \quad \text{und}$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^n x^{n-1}\,\mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,.$$
Hinweis: Wenden Sie den ZGS auf Summen geeigneter Poisson– bzw. exponentiell verteilter zufälliger Größen an.

Abgabe: Am 22.01.09 oder am 23.01.09 in der Übungszeit.