Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie 2008/09

<u>10. Serie</u>

1. Berechnen Sie $\mathbb{E}X^n$ für $n \in \mathbb{N}$ und eine $\mathcal{N}(0,1)$–verteilte zufällige Größe X.

2. Es sei X gemäß $\Gamma_{a,b}$ verteilt. Berechnen Sie $\mathbb{V}X$.

3. Zu jeder Zahl $n \geq 1$ konstruiere man eine zufällige Größe X mit $\mathbb{E}|X|^n < \infty$ und $\mathbb{E}|X|^{n+1} = \infty$.

4. In einer Urne befinden sich n Kugeln, die mit der Zahl 0 beschriftet sind, und weiterhin n Kugeln, auf denen die Zahl 1 steht. Man ziehe zufällig zwei Kugeln ohne Zurücklegen. Es sei X der Wert der zuerst gezogenen Kugel und Y der der zweiten. Bestimmen Sie den Korrelationskoeffizienten $\rho(X,Y)$.

5. Gegeben seien zwei zufällige Größen X und Y mit

$$\mathbb{P}(X=0, Y=0) = \mathbb{P}(X=1, Y=1) = \mathbb{P}(X=-1, Y=1) = \frac{1}{3} \, .$$

Zeigen Sie, dass X und Y unkorreliert sind, aber nicht unabhängig.

6. Gegeben seien unabhängige $\mathcal{N}(0,1)$–verteilte zufällige Größen $X_1, \ldots, X_n$ und eine $n \times n$–Matrix $A = \big(\alpha_{ij}\big)_{i,j=1}^n$ reeller Zahlen. Mit diesen konstruiere man zufällige Größen $Y_1, \ldots, Y_n$ mittels

$$Y_i := \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} X_j \ , \quad 1 \leq i \leq n \, .$$

Schließlich sei $R = \big(\mathrm{cov}(Y_k, Y_l)\big)_{k,l=1}^n$ die Kovarianzmatrix der Folge $Y_1, \ldots, Y_n$.

   (a) Zeigen Sie, dass die Matrix R symmetrisch und nichtnegativ definit ist.
   Eine Matrix $R = \big(r_{ij}\big)_{i,j=1}^n$ heißt bekanntlich nichtnegativ definit, wenn für alle $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ stets

$$\langle Rx, x \rangle = \sum_{i,j=1}^n r_{ij} \, x_i x_j \geq 0$$

   gilt.

   (b) Wie berechnet sich R aus der Matrix A ?

Abgabe: Am 15.01.09 oder am 16.01.09 in der Übungszeit.