Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie 2008/09

9. Serie

1. Sei X eine zufällige Größe mit Werten in $\mathbb{R}^+$. X heißt lognormal verteilt, wenn $\log X$ eine $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$–Verteilung besitzt (mit log wird der Logarithmus zur Basis e bezeichnet). Bestimmen Sie die Dichte einer lognormalen zufälligen Größe.

2. Es sei U eine auf $[0,1]$ gleichverteilte zufällige Größe. Bestimmen Sie Funktionen $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, so dass $Y := f(U)$ folgende Verteilungsgesetze besitzt:

   - Y ist Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda > 0$.
   - Es gilt $\mathbb{P}(Y = n) = 2^{-n}$ für $n = 1, 2, \ldots$
   - Y hat die Verteilungsdichte p mit

   $$p(x) := \begin{cases} 0 & : \quad |x| > 1 \\ x+1 & : \quad -1 \le x \le 0 \\ 1-x & : \quad 0 < x \le 1 \end{cases} .$$

   - Y ist Cauchy–verteilt, d.h. die Verteilungsdichte ist $\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$ für $x \in \mathbb{R}$.

3. Zwei Personen, A und B, spielen ein faires Spiel, d.h. ein Spiel, bei dem die Gewinnchancen für beide Spieler jeweils 50% betragen. Gesamtsieger ist derjenige, der zuerst 6 Partien gewonnen hat. Dieser erhält den Gesamteinsatz von 40 Euro ausgezahlt. Eines Tages muß das Spiel beim Stand von 5 Siegen von A und 3 Siegen von B abgebrochen werden. Wie sind in diesem Fall die 40 Euro unter A und B gerechterweise aufzuteilen?

4. Es sei X eine Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ mit Werten in $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Beweisen Sie

   $$\mathbb{E}X = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \ge n).$$

   Gilt dies auch, falls X nur Werte in $\mathbb{N}$ hat ?

Abgabe: Am 08.01.09 oder am 09.01.09 in der Übungszeit.