

Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie 2008/09

8. Serie

1. Ein Gerät bestehe aus N verschiedenen Bauteilen, deren Lebenszeiten unabhängig voneinander seien und exponentiell verteilt mit einem festen Parameter $\lambda > 0$, d.h., die Wahrscheinlichkeit, dass eines der N Bauteile mindestens T Zeiteinheiten arbeitet, sei $e^{-\lambda T}$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass zum Zeitpunkt $T > 0$ genau k der N Bauteile ausgefallen sind. Wie groß ist insbesondere die Wahrscheinlichkeit, dass zum Zeitpunkt T noch alle Bauteile arbeiten und wie groß die, dass dann bereits alle Bauteile ausgefallen sind ?
2. An einen Schalter in einer Bank erscheinen die Kunden zufällig. Die Zeiträume zwischen dem Eintreffen der einzelnen Kunden seien unabhängig und exponentiell verteilt mit Parameter $\lambda > 0$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bis zu einem festen Zeitpunkt $T > 0$ genau k Kunden, $k \in \mathbb{N}_0$, am Schalter eingetroffen sind ?
3. Es sei Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung, d.h. es gilt

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-x^2/2} dx, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ist $\alpha \in (0, 1)$ gegeben, so nennt man u_α ein α -Quantil für $\mathcal{N}(0, 1)$, falls $\Phi(u_\alpha) = \alpha$ gilt. Zeigen Sie folgende Eigenschaften der Quantile:

$$\begin{aligned} (i) \quad & \lim_{\alpha \rightarrow 0} u_\alpha = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{\alpha \rightarrow 1} u_\alpha = \infty \\ (ii) \quad & u_\alpha = -u_{1-\alpha} \\ (iii) \quad & \mathcal{N}(0, 1)\left([u_{\alpha/2}, u_{1-\alpha/2}]\right) = 1 - \alpha \end{aligned}$$

4. Sei U eine auf $[0, 1]$ gleichverteilte zufällige Größe.
 - (a) Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ bestimme man das Verteilungsgesetz von $aU + b$. Welche Verteilung hat insbesondere $1 - U$?
 - (b) Bestimmen Sie Verteilungsfunktion und die zugehörigen Dichten von U^2 , $1/U$, \sqrt{U} und $\min\{U, 1 - U\}$.
5. Die zwei zufälligen Größen X und Y seien beide exponentiell verteilt mit Parameter $\lambda > 0$ und unabhängig. Welche Verteilungsdichte hat $X - Y$?

Abgabe: Am 18.12.08 oder am 19.12.08 in der Übungszeit.