# Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie 2008/09

7. Serie

1. Konstruieren Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ und drei abhängige Ereignisse $A$, $B$, $C \in \mathcal{A}$ mit $0 < \mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B), \mathbb{P}(C) < 1$, so dass
$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C)$$
gilt.

   Geben Sie weiterhin ein Beispiel von drei paarweise unabhängigen Mengen $A, B$ und $C$, die abhängig sind, und für die $A \cap B \cap C \neq \emptyset$ gilt.
   *Hinweis:* Man modifiziere das Beispiel aus der Vorlesung entsprechend.

2. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ sei streng monoton und stetig differenzierbar. Sei $X$ eine zufällige Größe mit Verteilungsdichte $p$ . Welche Verteilungsdichte hat dann $Y := f(X)$ ?
   *Hinweis:* Behandeln Sie die Fälle "$f$ wachsend" und "$f$ fallend" getrennt.

   Bestimmen Sie die Verteilungsdichten von $\mathrm{e}^X$ und von $\mathrm{e}^{-X}$ für eine $\mathcal{N}(0,1)$–verteilte zufällige Größe $X$ .

3. Es sei $\vec{X} = (X_1, X_2)$ ein zufälliger Vektor, der auf dem Einheitskreis $C = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ gleichverteilt ist. Wir bezeichnen mit $(R, \theta)$ die Polarkoordinaten von $(X_1, X_2)$, d.h., $R$ und $\theta$ sind zufällige Größen mit $0 \leq R \leq 1$ und $-\pi < \theta \leq \pi$, so dass $X_1 = R\cos\theta$ und $X_2 = R\sin\theta$ gilt.

   (a) Bestimmen Sie Verteilungsfunktion und Verteilungsdichte von $X_1$ und $X_2$.

   (b) Bestimmen Sie Verteilungsfunktion und Verteilungsdichte von $R$ und $\theta$ und prüfen Sie, ob $R$ und $\theta$ unabhängig sind.

4. Wir würfeln unabhängig mit zwei Würfeln. Mit $X_1$ bzw. $X_2$ bezeichne man die Augenzahl des ersten bzw. zweiten Würfels. Kann man durch Verfälschung der beiden Würfel (d.h. man verändert die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(X_i = j)$, $i = 1, 2$, $j = 1, \ldots, 6$) erreichen, dass die Augensumme $X_1 + X_2$ auf $\{2, \ldots, 12\}$ gleichverteilt ist ? Dabei brauchen die Verfälschungen der Würfel nicht identisch zu sein.

5. Die zufällige Größe $Z$ sei exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$. Wir betrachten $X := [Z]$ und $Y := Z - [Z]$, wobei $[\cdot]$ die entier-Funktion (ganzer Teil) bezeichnet.

   (a) Bestimmen Sie die gemeinsame Verteilung von $(X, Y)$ und die zugehörigen Randverteilungen.
   *Hinweis:* Berechnen Sie $\mathbb{P}(X = n, Y \leq y)$. Überlegen Sie sich vorher, welche Werte $X$ und $Y$ annehmen können.

   (b) Sind $X$ und $Y$ unabhängig?

*Abgabe:* Am 11.12.08 oder am 12.12.08 in der Übungszeit.