Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie 2008/09

6. Serie

1. (a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass für eine vorgegebene Zahl $k \in \mathbb{N}_0$ beim Würfeln mit einem Würfel im $(k+1)$–ten Wurf erstmals eine „6“ erscheint. Für welches k wird diese Wahrscheinlichkeit maximal?

   (b) Spieler A und Spieler B würfeln abwechselnd mit einem Würfel. Spieler A beginnt. Gewinner des Spiels ist, wer zuerst eine „6“ würfelt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass B gewinnt.

   (c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beim Würfeln mit zwei Würfeln auf mindestens einem der Würfel erstmals eine „6“ im $(k+1)$–ten Versuch erscheint?

2. Beim zweimaligen Werfen eines Würfels bezeichne X das Maximum der beiden gewürfelten Zahlen und Y deren Minimum.

   (a) Bestimmen Sie das Verteilungsgesetz des zufälligen Vektors (X, Y).

   (b) Berechnen Sie hieraus die Randverteilungen $\mathbb{P}_X$ und $\mathbb{P}_Y$.

   (c) Überprüfen Sie, ob für $k, l \in \{1, \dots, 6\}$ und $l \leq k$ die Ereignisse $\{X = k\}$ und $\{Y = l\}$ unabhängig sind.

3. Ein Händler erhält 3 Lieferungen von Glühbirnen im Umfang von 800, 1000 und 200 Stück. Dabei sind in der ersten Lieferung 10% defekt, in der zweiten 20% und in der dritten 5%. Man wählt nun zufällig und gemäß der Gleichverteilung eine der insgesamt 2000 Glühbirnen zur Überprüfung aus.

   (a) Welcher Grundraum beschreibt das Experiment?

   (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die gewählte Glühbirne defekt ist ?

   (c) Angenommen, die überprüfte Glühbirne ist defekt. Wie groß sind dann die Wahrscheinlichkeiten, dass diese aus der ersten, zweiten oder dritten Lieferung stammt ?

   (d) Welche Teilmengen von Ω haben Sie zur Lösung der in (b) und (c) gestellten Fragen verwendet?

4. Es sei $\Omega := \{0, 1\}^n$ und p bezeichne eine vorgegebene Zahl in $[0, 1]$. Für $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega$ definiert man nun
$$\mathbb{P}(\{\omega\}) := p^k \, (1-p)^{n-k}$$
wobei $k := \omega_1 + \dots + \omega_n$.

   (a) Zeigen Sie, dass durch diesen Ansatz ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{P}(\Omega)$ definiert wird.

   (b) Man führt nun zufällige Größen X_j, $1 \leq j \leq n$, auf Ω durch
$$X_j(\omega) := \omega_j \quad \text{mit} \quad \omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$$
   ein. Bestimmen Sie die Verteilungsgesetze der X_j.

   (c) Zeigen Sie, dass für eine beliebig vorgegebene Folge $a_1, \dots, a_n$ mit $a_j \in \{0, 1\}$ stets
$$\mathbb{P}(X_1 = a_1, \dots, X_n = a_n) = \mathbb{P}(X_1 = a_1) \cdots \mathbb{P}(X_n = a_n)$$
   gilt.

Abgabe: Am 04.12.08 oder am 05.12.08 in der Übungszeit.