Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie 2008/09

5. Serie

1. Zeigen Sie, dass folgende Funktionen p Dichten eines Wahrscheinlichkeitsmaßes sind, und geben Sie die erzeugte Verteilungsfunktion an.

   (a) $$p(x) = \tfrac{\alpha}{2}\,\mathrm{e}^{-\alpha|x|}, \quad x \in \mathbb{R},$$

   wobei $\alpha > 0$ sei. Das ist die Dichte einer zweiseitigen Exponentialverteilung, manchmal auch Laplaceverteilung genannt.

   (b) $$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{a}\left(1 - \frac{|x|}{a}\right) & \text{für} \quad |x| \le a \\ 0 & \text{für} \quad |x| > a \end{cases},$$

   wobei $a > 0$ sei. Das ist die Dichte einer Dreiecksverteilung.

   (c) $$p(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mathrm{e}^{-x^2/2} & \text{für} \quad x \ge 0 \\ 0 & \text{für} \quad x < 0 \end{cases}.$$

   Dies ist die Dichte der positiven Normalverteilung.

2. (Paradoxon von Bertrand) In einen Kreis vom Radius 1 wird zufällig eine Sehne gelegt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Länge dieser zufälligen Sehne ebenfalls kleiner oder gleich 1 ist ?

   In der angegebenen Form besitzt das Problem verschiedene Lösungen, da die Art, wie die Sehne zufällig zu wählen ist, verschiedene Varianten zulässt:

   (a) Der Mittelpunkt der Sehne wird gemäß der Gleichverteilung innerhalb des Kreises bestimmt.

   (b) Man wähle gemäß der Gleichverteilung auf der Kreislinie zufällig und unabhängig voneinander zwei Punkte und verbinde diese.

   (c) Der Abstand der Sehne vom Mittelpunkt des Kreises wird zufällig und gleichverteilt aus dem Intervall $[0, 1]$ gewählt, davon unabhängig der Winkel des Lotes vom Mittelpunkt des Kreises auf die Sehne gleichverteilt aus $[0, 2\pi]$.

   Bestimmen Sie die gesuchte Wahrscheinlichkeit in den genannten Fällen.

3. Man breche einen Stock der Länge L zufällig in drei Teile, so dass die beiden Bruchstellen gleichverteilt auf $[0, L] \times [0, L]$ sind. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man aus den drei Bruchstücken ein Dreieck legen kann ?

4. Ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ habe die Verteilungsfunktion

   $$F(x) = \begin{cases} 0 & ;\ x < -1 \\ 1/8 & ;\ -1 \le x < 0 \\ 1/2 & ;\ 0 \le x < 1/2 \\ 3/4 & ;\ 1/2 \le x < 1 \\ 1 & ;\ x \ge 1 \end{cases}$$

   (a) Geben Sie $\mathbb{P}(\{x\})$ für alle $x \in \mathbb{R}$ an.

   (b) Berechnen Sie $\mathbb{P}(\mathbb{Z})$, wobei $\mathbb{Z}$ die Menge der ganzen Zahlen bezeichnet.

Abgabe: Am 27.11.08 oder am 28.11.08 in der Übungszeit.