Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie 2008/09

4. Serie

1. Die Funktion p auf $\mathbb{R}$ sei durch

$$p(x) := \begin{cases} 0 & : \; x \leq 1 \\ \frac{c}{x^2} & : \; x > 1 \end{cases}$$

   definiert. Bestimmen Sie die Zahl $c \in \mathbb{R}$ so, dass p eine Wahrscheinlichkeitsdichte wird. Sei $\mathbb{P}$ das von p erzeugte Wahrscheinlichkeitsmaß, so berechne man $\mathbb{P}([0,2])$ und $\mathbb{P}([4,\infty))$.

2. Wir wählen zufällig N Personen aus der Bevölkerung aus und notieren ihre Geburtstage. Wir machen ferner die (nicht ganz realistische) Annahme, dass die Geburten „gleichmäßig“ über das Jahr verteilt sind, und wir ignorieren Schaltjahre.

   (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 2 Personen am 23. März Geburtstag haben ?

   (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei Personen am gleichen Tag Geburtstag haben ? Wie groß muss N mindestens gewählt werden, damit diese Wahrscheinlichkeit größer oder gleich $1/2$ ist ?

   Hinweis: Sie haben die Möglichkeit, für Ihre Lösung eine approximative Verteilung zu verwenden.

3. In einem See befindet sich eine unbekannte Zahl von Fischen. Man entnehme dem See zufällig 25 Fische, markiere diese und setze sie danach wieder in den See. Nach einiger Zeit entnehme man wiederum zufällig 60 Fische. Von diesen 60 Fischen sind 7 markiert. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für diese Beobachtung, vorausgesetzt im Teich befinden sich insgesamt 100, 150, 200, 250 oder 300 Fische ?
   Hinweis: Benutzen Sie mathematische Programme zur Berechnung von Binomialkoeffizienten.
   Bei welcher Anzahl von Fischen im Teich wird die Wahrscheinlichkeit für das beobachtete Ereignis maximal ?
   Hinweis: Es sei p_N die Wahrscheinlichkeit des beobachteten Ereignisses unter der Annahme, dass sich N Fische im Teich befinden. Man überprüfe, für welche N der Wert von p_{N-1} kleiner oder gleich p_N ist und wann größer und schließe hieraus auf den maximalen Wert.

4. Sei P_λ das Verteilungsgesetz der Poisson–Verteilung mit Parameter $\lambda > 0$. Bestimmen Sie das (oder die) $k \in \{0, 1, \ldots\}$, für welches $P_\lambda(\{k\})$ maximal wird und beweisen Sie Ihre Behauptung.

5. Sei Ω eine beliebige nichtleere Menge. Beschreiben Sie die kleinste σ–Algebra von Teilmengen aus Ω, die alle einpunktigen Mengen enthält.

Abgabe: Am 20.11.08 oder am 21.11.08 in der Übungszeit.