Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie 2008/09

3. Serie

1. Seien A_1, A_2 und A_3 Ereignisse in Ω. Beweisen Sie folgende Formel:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) \\ &\quad - \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \ .\end{aligned}$$

   (a) Verallgemeinern Sie diese Formel auf den Fall von n Ereignissen $A_1, \ldots, A_n$ (Formel von Poincaré oder Einschluss–Ausschluss–Formel).

   (b) An der Rezeption eines Hotels treffen gleichzeitig n Personen mit je einem Koffer ein, stellen diesen ab und begeben sich ohne Gepäck auf ihre Einzelzimmer. Als der Angestellte des Hotels das Gepäck auf die Zimmer tragen will, kann er sich leider nicht mehr erinnern, welcher Koffer welchem Gast gehört. Er beschließt, die n Koffer zufällig auf die n Zimmer zu verteilen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Gast seinen eigenen Koffer bekommt ?

   (c) Untersuchen Sie das Verhalten dieser Wahrscheinlichkeit für $n \to \infty$.

2. Der Chevalier de Méré bemerkte, dass beim häufigen gleichzeitigen Werfen von 3 Würfeln die Augensumme 11 öfter auftrat als die Augensumme 12, obwohl 11 und 12 durch gleich viele Augenzahlkombinationen erzeugt werden. (Für 11 sind dies die Kombinationen 6-4-1, 6-3-2, 5-5-1, 5-4-2, 5-3-3 und 4-4-3.)

   (a) Durch welche Augenzahlkombinationen wird 12 erzeugt ?

   (b) Geben Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum für obiges Experiment an und interpretieren Sie die Elementarereignisse.

   (c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse A_1 : „Augensumme 11“ und A_2 : „Augensumme 12“.

   Ist de Mérés Beobachtung auf zufällige Abweichungen zurückzuführen oder ist seine Argumentation falsch (und falls ja, wieso) ?

3. (Aufgabe von Stefan Banach) Ein Raucher hat in beiden Hosentaschen Streichholzschachteln mit jeweils N Streichhölzern. Er verwendet zufällig, d.h. mit Wahrscheinlichkeit $1/2$, eine der beiden Schachteln. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich im Moment, wo er das letzte Streichholz aus einer der beiden Schachteln benutzt, sich in der anderen Schachtel noch genau k Streichölzer befinden ?

4. Sechs Personen steigen in einen Zug ein, der aus drei Waggons besteht. Jeder der sechs Passagiere wählt zufällig einen Wagen, unabhängig davon, ob sich dort schon eine andere der sechs Personen befindet oder nicht.

   (a) Auf wie viele Arten können sich die sechs Personen auf die drei Waggons verteilen? (Hierbei werden zwei Verteilungen als gleich angesehen, wenn in den Waggons die Anzahl der Personen übereinstimmt, nicht aber unbedingt die konkreten Personen !)

   (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in jedem Wagen genau zwei Personen sitzen?

Abgabe: Am 13.11.08 oder am 14.11.08 in der Übungszeit.