Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie 2008/09

<u>2. Serie</u>

1. In einer Urne befinden sich 6 weiße und 4 schwarze Kugeln. Geben Sie wahrscheinlichkeitstheoretische Modelle für folgende Experimente mit zufälligem Ausgang an:

   (a) Man ziehe nacheinander 4 Kugeln, registriere deren Farben, wobei die gezogenen Kugeln nach jedem Zug zurückgelegt werden.

   (b) Man entnehme der Urne nacheinander 2 Kugeln, registriere deren Farben, ohne dabei die zuerst gezogene Kugel wieder zurückzulegen.

   (c) Man entnehme der Urne auf einmal 3 Kugeln und registriere die Anzahl der gezogenen weißen bzw. schwarzen Kugeln.

2. Die Ereignisse A und B haben die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(A) = 1/3$, $\mathbb{P}(B) = 1/4$, und es gelte $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/6$. Berechnen Sie $\mathbb{P}(A^c)$, $\mathbb{P}(A^c \cup B)$, $\mathbb{P}(A \cup B^c)$, $\mathbb{P}(A \cap B^c)$ sowie $\mathbb{P}(A^c \cup B^c)$.

3. Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra von Teilmengen aus Ω und sei $\mathbb{P}$ eine endlichadditive Abbildung von $\mathcal{A}$ nach $[0,1]$ mit $\mathbb{P}(\Omega) = 1$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}$ dann und nur dann ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist, wenn für $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$ aus $\mathcal{A}$ mit $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \emptyset$ stets $\lim_{j\to\infty} \mathbb{P}(A_j) = 0$ gilt. („Stetigkeit in der leeren Menge“)

4. Eine Münze werde unendlich oft geworfen. Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne A_n das Ereignis „Im n-ten Wurf fällt Kopf.“ Stellen Sie folgende Ereignisse mittels der A_n, $n \in \mathbb{N}$, dar:

   - A: „Es fällt immer Kopf.“
   - B: „Es fällt nicht immer Zahl.“
   - C: „Es fällt genau einmal Kopf.“
   - D: „Es fällt abwechselnd Kopf und Zahl.“
   - E: „Es fällt unendlich oft Kopf.“
   - F: „Es fällt schließlich immer Kopf.“

5. Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A_1, A_2, \ldots$ seien Mengen in $\mathcal{A}$. Man beweise für den in Aufgabe 1, 1. Serie, eingeführten oberen Limes A der Mengen A_n, d.h. $A = \limsup_{n\to\infty} A_n$, die folgende Aussage:

   Aus $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < +\infty$ folgt stets $\mathbb{P}(A) = 0$.

   ($\star$) Gilt die Umkehrung ?

Abgabe: Am 06.11.08 oder am 07.11.08 in der Übungszeit.