

Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie 2008/09

1. Serie

1. Es sei Ω eine nichtleere Menge und A_1, A_2, \dots seien Teilmengen von Ω .
- (a) Stellen Sie $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ als Vereinigung paarweise disjunkter, aus den A_j gebildeter, Mengen dar.
 - (b) Wie sieht diese Darstellung für die Fälle $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$ bzw. $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$ aus ?
 - (c) Es seien

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n := \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n \quad \text{und} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n := \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} A_n$$

der obere bzw. untere Limes der Mengenfolge $(A_n)_{n \geq 1}$.

- (i) Zeigen Sie $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \subseteq \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$.
 - (ii) Charakterisieren Sie die Elemente dieser beiden Mengen in Bezug auf ihre Zugehörigkeit zu den Mengen A_n , $n = 1, 2, \dots$
 - (iii) Berechnen Sie $(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n)^c$ und $(\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n)^c$.
2. Es seien A, B, C drei Ereignisse. Drücken Sie in Abhängigkeit von A, B, C die folgenden Ereignisse mittels mengentheoretischer Operationen aus:

- (a) Nur A tritt ein;
- (b) A und C treten ein, nicht aber B ;
- (c) alle drei Ereignisse treten ein;
- (d) mindestens eines der Ereignisse tritt ein;
- (e) mindestens zwei der Ereignisse treten ein;
- (f) höchstens eines der Ereignisse tritt ein;
- (g) keines der Ereignisse tritt ein;
- (h) genau zwei der Ereignisse treten ein;
- (i) nicht mehr als zwei der Ereignisse treten ein.

3. Digitale Daten werden bekanntlich durch eine Folge von Nullen und Einsen übertragen.

- (a) Wie viele Wörter der Länge N gibt es, die so übertragen werden können?
- (b) Für $N = 2n$ sei $k(n)$ die Anzahl der Wörter der Länge N , die genau aus n Nullen und n Einsen bestehen. Berechnen Sie $k(n)$.
- (c) Man bestimme den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/2} 2^{-2n} k(n)$.

Abgabe: In der Woche vom 27.10.08 bis zum 30.10.08 in der Übungszeit.