

Klausur 19. 02. 2003

Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie für Mathematik- und
Lehramtsstudenten

1. Es sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B \in \mathfrak{A}$ seien Ereignisse mit $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 1$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen: 2P

$$\mathbb{P}(A \cap B) = 1 \quad \text{und} \quad \mathbb{P}(A \setminus B) = 0.$$

2. Es werde dreimal eine verfälschte Münze geworfen, wobei die Zahl 0 mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ und die Zahl 1 mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$ erscheinen.

(a) Geben Sie einen dieses Experiment beschreibenden Wahrscheinlichkeitsraum an. 2P

(b) Stellen Sie das Ereignis

$$A := \{\text{Ergebnis des ersten Wurfs gleich dem des zweiten Wurfs}\}$$

als Teilmenge des Grundraums dar und berechnen Sie $\mathbb{P}(A)$. 2P

(c) Beschreiben Sie $B := \{\text{Dritter Wurf ist 1}\}$ als Teilmenge des Grundraums. Wie viele Elemente enthält B ? Berechnen Sie $\mathbb{P}(B)$. 2P

(d) Überprüfen Sie A und B auf Unabhängigkeit. 1P

3. Die Dauer von in einer Zentrale eingehenden Telefongesprächen sei exponentiell verteilt, wobei im Durchschnitt die Gesprächsdauer 5 Zeiteinheiten betrage. Außerdem sei die Dauer unterschiedlicher Gespräche unabhängig voneinander.

(a) Geben Sie Verteilungsfunktion und Dichte der Verteilung der Gesprächsdauer an. 2P

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Dauer eines Gesprächs weniger als 10 Zeiteinheiten beträgt, unter der Bedingung, daß es mindestens 5 Zeiteinheiten dauert? 2P

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß genau k von N eingehenden Gesprächen 10 oder mehr Zeiteinheiten dauern? 2P

(d) Welche Verteilung besitzt die Gesamtgesprächsdauer bei N eingehenden Gesprächen? 1P

4. Es werden unabhängig und gemäß der Gleichverteilung n Zahlen aus dem Intervall $[0, 1]$ gezogen. Mit X bezeichne man die größte der gezogenen Zahlen.

(a) Geben Sie Verteilungsfunktion und Verteilungsdichte der zufälligen Größe X an. 3P

(b) Berechnen Sie $\mathbb{E}X$. 1P

5. Ein Händler erhält 3 Lieferungen von Glühbirnen im Umfang von 750, 1000 und 250 Stück. Dabei sind in der ersten Lieferung 10% defekt, in der zweiten 20% und in der dritten 5%. Man wählt nun zufällig und gemäß der Gleichverteilung eine der insgesamt 2000 Glühbirnen zur Überprüfung aus.

(a) Welcher Grundraum beschreibt das Experiment und welche Teilmengen werden zur Lösung der in (b) und (c) gestellten Fragen verwendet? 1P

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die gewählte Glühbirne defekt ist? 2P

(c) Angenommen, die überprüfte Glühbirne ist defekt. Wie groß sind dann die Wahrscheinlichkeiten, daß diese aus der ersten, zweiten oder dritten Lieferung stammt? 2P

Bestanden ist die Klausur ab (einschließlich) 12,5 Punkten. Σ 25P