

# Distributionentheorie

FSU Jena - SS 2009

Vorlesungsscript

Stilianos Louca

30. Dezember 2009

---

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Vorwort</b>	<b>4</b>
1.1	Was dies ist . . . . .	4
1.2	Verbesserungen . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Einführung</b>	<b>5</b>
2.1	Motivation . . . . .	5
2.1.1	Vertauschung von Grenzwerten und Integralen . . . . .	5
2.1.2	Lösungsräume von DGL . . . . .	5
2.1.3	Mittelungen . . . . .	6
2.1.4	Fouriertransformationen . . . . .	6
2.2	Topologische Vorbetrachtungen . . . . .	6
2.2.1	Definition: Ausschöpfungsfolge . . . . .	6
2.2.2	Lemma: Transformation von Ausschöpfungsfolgen . . . . .	6
2.2.3	Lemma: Existenz von Ausschöpfungsfolgen . . . . .	7
2.2.4	Definition: Induzierte Topologie in Untermenge . . . . .	7
2.2.5	Definition: Präkompaktheit . . . . .	9
2.3	Grundräume von Testfunktionen . . . . .	9
2.3.1	Notationen . . . . .	9
2.3.2	Definition: Schwartz-Raum . . . . .	10
2.3.3	Topologische Aspekte von $S(\mathbb{R}^n)$ . . . . .	10
2.3.4	Bemerkung: Der Schwartzraum als Einbettung im $L_p$ . . . . .	11
2.3.5	Definition: $(C^\infty(\Omega), (\ \cdot\ _{\overline{\Omega}_j, m}))$ . . . . .	11
2.3.6	Topologische Aspekte von $C^\infty(\Omega)$ . . . . .	11
2.3.7	Topologische Aspekte von $C_0^\infty(\Omega)$ . . . . .	13
2.3.8	Lemma: Einbettung der Funktionenräume . . . . .	13
2.4	Zerlegungen der Eins . . . . .	14
2.4.1	Vorbetrachtung . . . . .	14
2.4.2	Lemma: Glättung mit $\omega_h$ . . . . .	15
2.4.3	Lemma über Mengenabstände . . . . .	17
2.4.4	Lemma: Existenz abklingender Funktionen . . . . .	17
2.4.5	Lemma: Zerlegung der Einheit . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Distributionen</b>	<b>19</b>
3.1	Vorbetrachtung . . . . .	19
3.1.1	Definition: Distribution auf $X$ . . . . .	19
3.1.2	Satz: Charakterisierung der Stetigkeit . . . . .	19
3.1.3	$X'$ als linearer Raum . . . . .	19
3.1.4	Bemerkung zur Distributionen-Einbettung . . . . .	20
3.1.5	Vergleich mit $\mathbb{C}^n$ . . . . .	20
3.1.6	Definition: $L_{p,loc}$ . . . . .	20

3.1.7	Satz über Funktionen in $L_{1,loc}(\Omega)$	21
3.1.8	Bemerkung zur Einbettung von $L_p$ Räumen in $S'(\mathbb{R}^n)$	21
3.1.9	Bemerkung zur Einbettung polynomialer Funktionen in $S'(\mathbb{R}^n)$	22
3.1.10	Lemma zur Konvergenz regulärer Distributionen	22
3.1.11	Lemma über Nullfunktionen in $L_{1,loc}$	22
3.1.12	Die $\delta$ -Distribution	23
3.1.13	Distributionen durch reguläre Maße	24
3.1.14	Der Cauchysche Hauptwert als Distribution	24
3.2	Folgen regulärer Distributionen	26
3.2.1	Vorbetrachtung	26
3.2.2	Formel von Sochozki	27
3.2.3	Die Breit-Wigner-Formel	27
3.2.4	Lokalisationssatz für Distributionen	27
3.2.5	Definition: Träger einer Distribution	28
3.2.6	Definition: Singuläre Träger	29
3.3	Distributionen mit kompaktem Träger	29
3.3.1	Fortsetzungssatz für Distributionen	29
3.3.2	Definition: $L_{p,com}$	30
3.3.3	Satz über Funktionen in $L_{1,com}(\Omega)$	30
3.3.4	Lemma: Träger von Distributionen in $\mathcal{C}'(\Omega)$	31
3.3.5	Definition: Ordnung einer Distribution	31
<b>4</b>	<b>Rechnen mit Distributionen</b>	<b>33</b>
4.1	Produkte von Distributionen	33
4.1.1	Motivation	33
4.1.2	Definition: Produkt von Distributionen mit $C^\infty$ -Funktionen	33
4.1.3	Satz über den Träger von Distributionenprodukten	33
4.1.4	Korollar über die lokale Wirkung von Distributionen	34
4.1.5	Beispiele von Distributionenprodukten	35
4.1.6	Bemerkung zu allgemeineren Distributionenprodukten	35
4.2	Differentiation von Distributionen	35
4.2.1	Vorbetrachtung	35
4.2.2	Definition: Ableitung von Distributionen	35
4.2.3	Eigenschaften der Distributionsableitung	36
4.2.4	Differentiationsbeispiele	37
4.2.5	Der Laplace-Integralkern	39
4.2.6	Integralkern der Wellengleichung	40
4.3	Koordinatentransformationen von Distributionen	42
4.3.1	Vorbetrachtung	42
4.3.2	Definition: Koordinatentransformation von Distributionen	42
4.3.3	Satz: Distributionen mit einem Punktspektrum	43
4.3.4	Bemerkung: Multiplikation von $\delta$ -Distributionen	44
4.4	Faltung von Funktionen	44
4.4.1	Definition: Faltung von Funktionen	44
4.4.2	Lemma: Eigenschaften der Faltung	45
4.5	Fouriertransformation von Funktionen	46
4.5.1	Definition: Fouriertransformierte	46
4.5.2	Beispiel: Das Abtasttheorem	47
4.5.3	Rechenregeln der Fouriertransformation	47
4.5.4	Satz über die Fouriertransformation	48
4.5.5	Satz: Isometrie der Fouriertransformation (Plancherell)	50
4.5.6	Faltungssatz	50
4.6	Fouriertransformation für Distributionen	51
4.6.1	Definition: Fouriertransformation	51
4.6.2	Satz: Bijektivität der Fouriertransformation	51
4.6.3	Satz: Konsistenz der Fouriertransformation für reguläre Distributionen	52
4.6.4	Rechenregeln für Fouriertransformation von Distributionen	52
4.6.5	Beispiel: Fouriertransformation der $\delta$ -Distribution	52

4.6.6	Lemma über Distributionen mit Punkttträger	53
4.6.7	Laplace-Transformation von Funktionen	54
4.6.8	Definition: Laplace-Transformation von Distributionen	54
4.6.9	Satz von Paley-Wiener	54
4.6.10	Satz von Paley-Wiener-Schwartz	56
<b>5</b>	<b>Verallgemeinerte Differentialgleichungen</b>	<b>57</b>
5.0.11	Definition: Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten	57
5.0.12	Verallgemeinerte Differentialgleichungen	57
5.0.13	Eigenschaften verallgemeinerter Differentialgleichungen	58
<b>6</b>	<b>Faltung und Tensorprodukt</b>	<b>60</b>
6.1	Faltung zwischen Distributionen & Funktionen	60
6.1.1	Definition: Faltung von Distributionen	60
6.1.2	Faltung und Differentialgleichungen	60
6.2	Faltung von Distributionen untereinander	60
6.2.1	Vorbetrachtung	60
6.2.2	Definition: Direktes Produkt zwischen Funktionen	61
6.2.3	Bemerkung zur teilweise Wirkung von Distributionen	61
6.2.4	Definition: Direktes Produkt zweier Distributionen	61
6.2.5	Lemma über den Träger von direkten Produkten	62
6.2.6	Hilfsdefinition zur Faltung	62
6.2.7	Definition: Faltung zweier Distributionen	63
6.2.8	Eigenschaften der Faltung	63
6.2.9	Bemerkung zur Kompatibilität der Faltung	64
<b>A</b>	<b>Anhang</b>	<b>65</b>
A.0.10	Hilfssatz zur Fortsetzungen von Operatoren	65
A.0.11	Definition: Sobolev-Raum	65
A.0.12	Definition: Gewichteter $L_p$ -Raum	65
<b>B</b>	<b>Symbol-Referenz</b>	<b>67</b>

# 1 Vorwort

## 1.1 Was dies ist

Hierbei handelt es sich um Aufzeichnungen und Erläuterungen des Stoffes der im SS 2009 an der FSU Jena von Prof. H.G Leopold im Fach *Distributionentheorie* gelehrt wurde.

## 1.2 Verbesserungen

Ich werde immer mal dieses Skript verbessern bzw. erweitern. Im Falle von Fehlern, ist mir Bescheid zu sagen das beste was du machen kannst, da so alle davon profitieren können. Wissen ist das einzige auf dieser Welt das vom Teilen mehr wird!

Ich bin zu erreichen unter *stilianos.louca@apfel.uni-jena.de*, ohne das *Obst*.

## 2 Einführung

### 2.1 Motivation

#### 2.1.1 Vertauschung von Grenzwerten und Integralen

Betrachten die Treppenfunktionen

$$f_n(x) := \begin{cases} \frac{n}{2} & : |x| \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

bzw. Dreieck-Funktionen

$$g_n(x) := \begin{cases} -n^2x + n & : 0 < x < \frac{1}{n} \\ n^2x - n & : -\frac{1}{n} < x \leq 0 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

bzw. Gaußfunktionen

$$h_n(x) := n \cdot e^{-\pi n^2 x^2}$$

für  $n \in \mathbb{N}$ . In allen 3 Fällen gilt

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx = \int_{\mathbb{R}} g_n(x) dx = \int_{\mathbb{R}} h_n(x) dx = 1$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x) = \begin{cases} \infty & : x = 0 \\ 0 & : x \neq 0 \end{cases}$$

Jedoch

$$\underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx}_1 \neq \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx}_0$$

(analog auch  $g_n$  und  $h_n$ ), das heißt Grenzwert und Integral sind nicht vertauschbar! Gesucht ist nun ein anderer Konvergenzbegriff für Funktionen, in dessen Kontext solche Vertauschungen Sinn machen.

Als Beispiel sei eine stetige Funktion  $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$  gegeben. Dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}} f_n \varphi dx \stackrel{\Phi = \int \varphi dx}{=} \frac{n}{2} \left[ \Phi \left( \frac{1}{n} \right) - \Phi \left( -\frac{1}{n} \right) \right] = \Phi(\xi_n)$$

für irgendein  $\xi_n \in B_{\frac{1}{n}}(0)$ . Somit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \varphi dx = \varphi(0)$$

was zu einem geeigneten Konvergenzbegriff von  $f_n$  Anlass gegeben könnte.

#### 2.1.2 Lösungsräume von DGL

Betrachten die Differentialgleichung

$$LU = f$$

in  $U$  mit dem Differentialoperator  $L$ . Die Existenz einer Lösung setzt oft zu hohe Forderungen an  $L$  bzw.  $f$ , so dass eine Einführung eines *schwächeren* Lösungsbegriffs zweckmäßig ist. So kann z.B. die DGL verallgemeinert werden auf

$$\int (LU) \cdot \varphi dx = \int f \cdot \varphi dx \quad \forall \varphi \in \Phi$$

für geeigneten Grundraum  $\Phi$  von Funktionen, was zu einem größeren Lösungsraum führen kann.

### 2.1.3 Mittelungen

Betrachten die Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  auf dem messbaren Raum  $(M, \mathcal{M})$ , z.B. *Temperaturverteilung auf  $M$* . Stellt man sich nun die *Messung* von  $f$  in  $x_0 \in M$  als eine Art *Mittelung* in einer Umgebung von  $x_0$  vor (*Thermometer* hat nicht-verschwindende Größe), so kann diese Beschrieben werden durch ein, das Verhalten vom Thermometer charakterisierendes, Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mu_{x_0}$ , *konzentriert um  $x_0$* :

$$\langle f \rangle_{\mu_{x_0}} = \int_M f d\mu_{x_0}$$

Im allgemeinen kann jedoch  $f$  nicht einfach aus den Werten  $\langle f \rangle_{\mu_x}$  bestimmt werden. Alternativ kann man sich  $f$  als lineares Funktional auf irgendeinen Raum  $\mathfrak{M}$  von Wahrscheinlichkeitsmaßen angesehen werden:

$$f : \mu \mapsto \int_M f d\mu \quad , \quad \mu \in \mathfrak{M}$$

Ist das Verhalten von  $f$  in  $\mathfrak{M}$  als solches bekannt, so kann manchmal (falls  $\mathfrak{M}$  groß genug) auch das Verhalten von  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  bestimmt werden.

### 2.1.4 Fouriertransformationen

Betrachten die Fouriertransformation

$$\mathcal{F} : L_1(\mathbb{R}) \rightarrow L_1(\mathbb{R})$$

definiert durch

$$\mathcal{F}(f)(k) := \tilde{f}(k) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x) dx$$

Eine Invertierung von  $\mathcal{F}$  ist im allgemeinen nicht möglich. Ist jedoch  $f \in L_1$  noch zusätzlich differenzierbar in  $x_0$  und  $\tilde{f} \in L_1$ , dann

$$f(x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \tilde{f}(k) dk$$

Dies ist leider oft eine zu hohe Anforderung an die *Testfunktionen*  $f$ , was eine Entfernung vom Begriff der punktweise Betrachtung motiviert.

## 2.2 Topologische Vorbetrachtungen

### 2.2.1 Definition: Ausschöpfungsfolge

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $(\Omega_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$  eine Folge offener Mengen, mit:

1.  $\Omega = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \Omega_j$
2.  $\overline{\Omega}_j \subset \Omega_{j+1}$
3.  $\overline{\Omega}_j$  kompakt ( $\Leftrightarrow$  beschränkt)

Dann heißt  $(\Omega_j)_{j \in \mathbb{N}}$  *Ausschöpfungsfolge* von  $\Omega$ .

### 2.2.2 Lemma: Transformation von Ausschöpfungsfolgen

Seien  $\Omega', \Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $\tau : \Omega \rightarrow \Omega'$  homöomorph<sup>1</sup>. Ist  $\Omega_1, \Omega_2, \dots$  eine Ausschöpfungsfolge von  $\Omega$ , so ist  $\tau(\Omega_1), \tau(\Omega_2), \dots$  eine Ausschöpfungsfolge von  $\Omega'$ .

<sup>1</sup>Eine Abbildung  $f : \Omega \rightarrow \Omega'$  heißt *homöomorph* wenn sie bijektiv ist mit  $f, f^{-1}$  stetig.

**Beweis:** Da  $\tau^{-1}$  stetig ist, sind die  $\tau(\Omega_j)$  offen und die  $\tau(\overline{\Omega_j})$  abgeschlossen. Wegen  $\tau(\Omega_j) \subset \tau(\overline{\Omega_j})$  und

$$\overline{\tau(\Omega_j)} \stackrel{\text{def.}}{=} \bigcap_{\substack{\tau(\Omega_j) \subset A \\ A \text{ abgeschlossen}}} A$$

ist  $\overline{\tau(\Omega_j)} \subset \tau(\overline{\Omega_j})$ , also

$$\overline{\tau(\Omega_j)} \subset \tau(\overline{\Omega_j}) \subset \tau(\Omega_{j+1}) \quad (\text{Bedingung 2})$$

Da  $\tau$  stetig ist, sind die  $\tau(\overline{\Omega_j})$  auch kompakt (also insbesondere beschränkt), das heißt auch  $\overline{\tau(\Omega_j)}$  sind beschränkt, sprich kompakt (Bedingung 3). Offensichtlich

$$\bigcup_{j \in \mathbb{N}} \tau(\Omega_j) = \tau\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} \Omega_j\right) = \tau(\Omega) = \Omega' \quad (\text{Bedingung 1})$$

□

### 2.2.3 Lemma: Existenz von Ausschöpfungsfolgen

Zu jeder offenen Menge  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  existiert eine Ausschöpfungsfolge  $(\Omega_j)_{j \in \mathbb{N}}$ .

**Beweis:** Die offenen Kugeln mit positivem, rationalem Radius und Zentrum in  $\mathbb{Q}^n$ :

$$\{B_\varepsilon^o(q) : q \in \mathbb{Q}^n, 0 < \varepsilon \in \mathbb{Q}\}$$

bilden bekanntlich eine Basis der Topologie in  $\mathbb{R}^n$ , so dass

$$\Omega = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_{\varepsilon_i}^o(q_i)$$

für irgendeine Folge  $(q_i, \varepsilon_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}^n \times \mathbb{Q}$ ,  $\varepsilon_i > 0$ . Die Folge

$$\Omega_k := \underbrace{\bigcup_{i=1}^k B_{\frac{\varepsilon_i}{1+k}}^o(q_i)}_{\text{offen, beschränkt}}, \quad k \in \mathbb{N}$$

ist dann eine Abschöpfungsfolge von  $\Omega$ , da offensichtlich  $\Omega = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \Omega_k$  und

$$\overline{\Omega_k} = \bigcup_{i=1}^k \underbrace{\overline{B_{\frac{\varepsilon_i}{1+k}}^o(q_i)}}_{B_{\frac{\varepsilon_i}{1+k}}(q_i)} \subset \bigcup_{i=1}^k B_{\frac{\varepsilon_i}{1+k+1}}^o(q_i) = \Omega_{k+1}$$

□

### 2.2.4 Definition: Induzierte Topologie in Untermenge

Die Topologie  $\mathcal{O}(T)$  eines topologischen Raumes  $T$  induziert in jeder Untermenge  $\Omega \subset T$  die Topologie

$$\mathcal{O}(\Omega) := \Omega \cap \mathcal{O}(T) := \{\Omega \cap U : U \in \mathcal{O}(T)\}$$

in  $\Omega$ , die sogenannte *Schnitttopologie*. Eine Menge  $A \subset \Omega$  heißt dementsprechend *offen in  $\Omega$* , falls  $A \in \mathcal{O}(\Omega)$ .

**Bemerkungen:**

(i) Ist  $(T, d)$  ein metrischer Raum und  $\mathcal{O}(T)$  induziert durch die Metrik  $d$ , so ist  $(\Omega, d|_{\Omega})$  ebenfalls ein metrischer Raum, und die Einschränkung  $d|_{\Omega}$  induziert auf  $\Omega$  genau die Schnitttopologie.

(ii) Ist  $\Omega$  offen, so ist  $\mathcal{O}(\Omega) \subset \mathcal{O}(T)$ . Insbesondere sind für  $A \subset \Omega$  Offenheit in  $\Omega$  und in  $T$  äquivalent.

(iii) Ist  $A \subset T$  abgeschlossen, so ist auch  $A \cap \Omega$  abgeschlossen in  $\Omega$ .

**Beweis:** Ist  $A = T \setminus U$  mit  $U \in \mathcal{O}(T)$ , so ist  $A \cap \Omega = \Omega \setminus \underbrace{(\Omega \cap U)}_{\in \mathcal{O}(\Omega)}$ .

(iv) Ist  $\Omega$  abgeschlossen, so ist für  $A \subset \Omega$  Abgeschlossenheit in  $(\Omega, \mathcal{O}(\Omega))$  äquivalent zu Abgeschlossenheit in  $(T, \mathcal{O}(T))$ .

**Beweis:** Nach (iii) ist Richtung " $\Leftarrow$ " trivial. Ist andererseits  $A = \Omega \setminus (\Omega \cap U)$  für ein  $U \in \mathcal{O}(T)$ , dann ist  $A = \Omega \cap U^c$  als Schnitt in  $T$  abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen.

(v) Eine Menge  $K \subset \Omega$  ist genau dann Kompakt in  $(\Omega, \mathcal{O}(\Omega))$  wenn sie auch in  $(T, \mathcal{O}(T))$  kompakt ist.

**Beweis:** Ist einerseits  $K$  kompakt in  $\Omega$  und  $K \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ ,  $U_i \in \mathcal{O}(T)$  so ist auch

$$K \subset \bigcup_{i \in I} \underbrace{U_i \cap \Omega}_{\in \mathcal{O}(\Omega)}$$

das heißt für endlich viele  $i_1, \dots, i_n \in I$ :

$$K \subset \bigcup_{k=1}^n U_{i_k} \cap \Omega \subset \bigcup_{k=1}^n U_{i_k}$$

Ist andererseits  $K$  kompakt in  $T$  und  $K = \bigcup_{i \in I} U_i$ ,  $U_i = \underbrace{\tilde{U}_i}_{\in \mathcal{O}(T)} \cap \Omega \in \mathcal{O}(\Omega)$  so ist auch

$$K \subset \bigcup_{i \in I} \tilde{U}_i$$

das heißt für endlich viele  $i_1, \dots, i_n \in I$ :

$$K \subset \bigcup_{k=1}^n \tilde{U}_{i_k} \xrightarrow{K \subseteq \Omega} K \subset \bigcup_{k=1}^n \underbrace{\tilde{U}_{i_k} \cap \Omega}_{\in \mathcal{O}(\Omega)}$$

(vi) Nach (v) ist insbesondere  $\Omega$  genau dann Kompakt in  $(T, \mathcal{O}(T))$ , wenn  $\Omega$  in  $(\Omega, \mathcal{O}(\Omega))$ , das heißt als topologischer Raum, kompakt ist.

(vii) Ist  $T$  kompakt und  $\Omega$  abgeschlossen in  $(T, \mathcal{O}(T))$ , so ist auch  $\Omega$  kompakt.

**Beweis:** Ist  $(U_i)_{i \in I} \subset \mathcal{O}(T)$  eine offene Überdeckung von  $\Omega$ , so ist  $\underbrace{T \setminus \Omega}_{\Omega^c \in \mathcal{O}(T)}$ ,  $(U_i)$  eine offene Überdeckung

von  $T$ . Es existiert also eine endliche Überdeckung

$$T \subset \Omega^c \cup \bigcup_{n=1}^N U_{i_n}$$

von  $T$ . Insbesondere ist

$$\Omega \subset \bigcup_{n=1}^N U_{i_n}$$

eine endliche Überdeckung von  $\Omega$ .

(viii) Ähnlich: Ist  $\Omega \subseteq T$  kompakt und  $A \subseteq \Omega$  abgeschlossen (in  $T$ ), so ist  $A$  kompakt.

**Beweis:** Nach (iii) ist  $A$  auch abgeschlossen in  $\Omega$ . Nach (vii) folgt die Behauptung.



### 2.2.5 Definition: Präkompaktheit

Ein metrischer Raum  $(\Omega, \rho)$  heißt *Präkompakt*, oder *total beschränkt*, falls:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists x_1, \dots, x_n \in \Omega : \Omega \subset \bigcup_{k=1}^n B_\varepsilon^o(x_k)$$

das heißt  $\Omega$  kann durch endlich viele Kugeln mit beliebig kleinem Radius  $\varepsilon$  überdeckt werden. Die Zentren solch einer Überdeckung nennt man  $\varepsilon$ -Netz.

#### Bemerkungen:

- (i) Ist  $\Omega$  kompakt, so ist er auch vollständig.
- (ii) Ist  $\Omega$  kompakt, so ist er auch Präkompakt, denn für  $\varepsilon > 0$  ist  $(B_\varepsilon^o(x))_{x \in \Omega}$  eine offene Überdeckung von  $\Omega$ . Die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht!
- (iii) Ist  $\Omega$  Präkompakt, so ist er insbesondere beschränkt, d.h.

$$\exists R > 0 : d(x, y) \leq R \quad \forall x, y \in \Omega$$

- (iv) Ist  $\Omega$  präkompakt und vollständig, so ist  $\Omega$  kompakt.

**Beispiel:** Die Menge  $(0, 1]$  mit der Metrik  $d(x, y) := |x - y|$  ist präkompakt denn für  $\varepsilon > 0$  (dazu  $l_0$  mit  $2^{-l_0} < \varepsilon$ ) ist

$$(0, 1] = \bigcup_{l=1}^{2^{l_0}-1} B_\varepsilon^o\left(\frac{l}{2^{l_0}}\right)$$

Jedoch ist  $(0, 1]$  nicht vollständig und demnach nicht kompakt.

## 2.3 Grundräume von Testfunktionen

### 2.3.1 Notationen

Für  $x, y \in \mathbb{R}^n$  schreiben wir

$$\|x\| := \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

$$\langle x \rangle := \sqrt{1 + |x|^2}$$

$$x \cdot y := \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i$$

Für  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  und  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$  schreiben wir

$$D^\alpha \varphi := (-i)^{|\alpha|} \cdot \underbrace{\frac{\partial^{|\alpha|} \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}}_{\partial^\alpha \varphi}, \quad |\alpha| := \sum_{j=1}^n \alpha_j, \quad \alpha! := \prod_{j=1}^n \alpha_j!, \quad x^\alpha := \prod_{j=1}^n x_j^{\alpha_j}$$

und setzen  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$  als den linearen Raum aller glatten, komplexen Funktionen in  $\mathbb{R}^n$ .

### 2.3.2 Definition: Schwartz-Raum

Die Funktionenmenge

$$S(\mathbb{R}^n) := \left\{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \|\varphi\|_{k,l} := \sup_x \{ \langle x \rangle^l \sum_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha \varphi(x)| \} < \infty \quad \forall k, l \in \mathbb{N}_0 \right\} \quad (2.3.2.1)$$

heißt *Schwartz-Raum über  $\mathbb{R}^n$* .

#### Beispiele:

- Polynome gehören nicht zu  $S(\mathbb{R}^n)$ .
- Die Gaußsche Funktion  $e^{-\|x\|^2/2}$  gehört zu  $S(\mathbb{R}^n)$ .

#### Bemerkungen:

- (i)  $S(\mathbb{R}^n)$  ist ein linearer Raum.  
 (ii) Für  $\varphi, \psi \in S(\mathbb{R}^n)$  ist auch  $\varphi \cdot \psi \in S(\mathbb{R}^n)$ , denn

$$\|\partial^\alpha(\varphi\psi)\|_{k,l} \leq C_k \|\varphi\|_{k,0} \|\psi\|_{k,l}$$

(Beweis analog zu 2.3.6 Bemerkung (ii)).

- (iii) Für  $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$  und Multiindex  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$  ist auch  $\partial^\alpha \varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ .

- (iv) Für  $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$  und Polynom  $Q(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} \lambda_\alpha x^\alpha$  ist auch  $Q \cdot \varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ , denn

$$|Q(x)| \in \mathcal{O}(x^{|\alpha|}) \Rightarrow \|Q\varphi\|_{k,l} \leq C_k \cdot \text{const}_m \cdot \|\varphi\|_{k,l+m}$$

(Rechnung ähnlich zu 2.3.6 Bemerkung (ii)).

- (v) Es ist  $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$  genau dann wenn  $\|x^\beta \partial^\alpha \varphi\|_\infty < \infty$  gilt für alle  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ .  
 Eine analoge Aussage gilt auch für die  $\|\partial^\alpha(x^\beta \varphi)\|_\infty$ .

**Beweis:** Richtung " $\Rightarrow$ " folgt aus Bemerkungen (iii) und (iv).  
 Richtung " $\Leftarrow$ " folgt aus

$$(1 + \|x\|^2)^{\frac{l}{2}} |\partial^\alpha \varphi(x)| \stackrel{\substack{x \\ \text{groß} \\ \text{genug}}}{\leq} \text{const} \cdot \sum_{j=1}^n \underbrace{|x_j^l \partial^\alpha \varphi(x)|}_{\leq \|x_j^l \partial^\alpha \varphi\|_\infty} \leq \text{const}_{\alpha,l,\varphi} < \infty$$

$$\Rightarrow \|\varphi\|_{k,l} \leq \text{const}_{l,\varphi} < \infty$$

Da  $\partial^\alpha(x^\beta \varphi)$  stets als Summe von Termen der Form  $x^* \partial^* \varphi$  geschrieben werden kann, folgt die Behauptung auch im Falle dass  $\|\partial^\alpha(x^\beta \varphi)\|_\infty < \infty \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$  ist.

### 2.3.3 Topologische Aspekte von $S(\mathbb{R}^n)$

Die Abbildungen  $\|\cdot\|_{k,l}$  stellen auf  $S(\mathbb{R}^n)$  halbnormen dar. Ferner ist  $S(\mathbb{R}^n)$  metrisierbar durch die Metrik

$$d(\varphi, \psi) = \sum_{k,l \in \mathbb{N}_0} \frac{\|\varphi - \psi\|_{k,l}}{1 + \|\varphi - \psi\|_{k,l}} \cdot \frac{1}{2^{k+l}}$$

und bzgl. dieser sogar vollständig und lokal konvex, das heißt ein Frechet-Raum. Alternativ kann man den Konvergenzbegriff

$$\varphi_\nu \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} \varphi \Leftrightarrow \|\varphi_\nu - \varphi\|_{k,l} \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} 0 \quad \forall k, l$$

einführen, der, wie sich herausstellt, äquivalent zu dem durch  $d$  erzeugten Konvergenzbegriff ist.

**Bemerkung:** Ähnlich zu Bemerkung (v) in 2.3.2 geht  $\varphi_\nu \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} \varphi$  genau dann wenn

$$\|x^\alpha \partial^\beta (\varphi_\nu - \varphi)\|_\infty \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} 0, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$$

und genau dann wenn

$$\|\partial^\beta (x^\alpha (\varphi_\nu - \varphi))\|_\infty \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} 0, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$$

### 2.3.4 Bemerkung: Der Schwartzraum als Einbettung im $L_p$

Wegen

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^p dx = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\varphi(x)|^p \langle x \rangle^{lp}}{\langle x \rangle^{lp}} dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\|\varphi\|_{0,l}^p}{\langle x \rangle^{lp}} dx \leq \|\varphi\|_{0,l}^p \cdot \underbrace{\text{vol}(S^n) \cdot \int_0^\infty \frac{r^{n-1}}{(1+r^2)^{\frac{lp}{2}}} dr}_{< \infty \text{ für } n < lp}, \quad 0 < p < \infty$$

ist

$$S(\mathbb{R}^n) \subseteq L_p(\mathbb{R}^n), \quad 0 < p \leq \infty$$

Aus der Rechnung ist außerdem ersichtlich: Gehen  $\varphi_\nu \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} \varphi$  in  $S(\mathbb{R}^n)$ , so gehen auch  $\varphi_\nu \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} \varphi$  in  $L_p(\mathbb{R}^n)$ , das heißt

$$\boxed{S(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_p(\mathbb{R}^n), \quad 0 < p \leq \infty} \quad (2.3.4.1)$$

Es kann sogar gezeigt werden:  $S(\mathbb{R}^n)$  ist dicht in  $L_2(\mathbb{R}^n)$ .

### 2.3.5 Definition: $(\mathcal{C}^\infty(\Omega), (\|\cdot\|_{\overline{\Omega}_j, m}))$

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $(\Omega_j)_{j \in \mathbb{N}}$  eine Ausschöpfungsfolge von  $\Omega$ . Dann definiert man

$$\mathcal{C}^\infty(\Omega) := \{\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \mid \varphi \text{ bel. oft differenzierbar}\}$$

$$\mathcal{C}_0^\infty(\Omega) := \{\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) : \text{supp}(\varphi) \subset \Omega \wedge \text{supp}(\varphi) \text{ kompakt}\}$$

### 2.3.6 Topologische Aspekte von $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$

Auf  $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$  können die Halbnormen

$$\|\varphi\|_{\overline{\Omega}_j, k} := \sup_{\substack{x \in \overline{\Omega}_j \\ |\alpha| \leq k}} |D^\alpha \varphi(x)|, \quad j \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}_0$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\max_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha \varphi\|_{\overline{\Omega}_j}}$$

eingeführt werden, die den Konvergenzbegriff

$$\varphi_\nu \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} \varphi := \Leftrightarrow \|\varphi_\nu - \varphi\|_{\overline{\Omega}_j, k} \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}_0 \quad (2.3.6.1)$$

erzeugen. Bemerke, dass  $\|\cdot\|_{\overline{\Omega}_j, m}$  eine Norm auf  $\mathcal{C}^m(\overline{\Omega}_j)$  ist.

**Bemerkungen:**

(i) Es ergibt sich, dass  $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$  metrisierbar, lokal-konvex und vollständig (Frechet-Raum) ist, mit einer genau den obigen Konvergenzbegriff erzeugenden Metrik. Setzt man diese Topologie voraus, schreibt man auch  $\mathcal{C}(\Omega)$  für  $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ .

(ii) Die Halbnormen  $\|\cdot\|_{\overline{\Omega}_j, k}$  erfüllen die Ungleichung

$$\|\varphi\psi\|_{\overline{\Omega}_j, k} \leq C_k \cdot \|\varphi\|_{\overline{\Omega}_j, k} \|\psi\|_{\overline{\Omega}_j, k} \quad (2.3.6.2)$$

für irgendwelche Konstanten  $C_k$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ , denn

$$\begin{aligned} \|\varphi\psi\|_{\overline{\Omega}_j, k} &= \sup_{\substack{x \in \overline{\Omega}_j \\ |\alpha| \leq k}} \left| \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \frac{\alpha!}{\beta!\gamma!} D^\beta \varphi(x) D^\gamma \psi(x) \right| \\ &\leq \sup_{\substack{x \in \overline{\Omega}_j \\ |\alpha| \leq k}} \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \frac{\alpha!}{\beta!\gamma!} |D^\beta \varphi(x)| |D^\gamma \psi(x)| \\ &\leq \max_{|\alpha| \leq k} \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \frac{\alpha!}{\beta!\gamma!} \underbrace{\sup_{x \in \overline{\Omega}_j} |D^\beta \varphi|}_{\leq \|\varphi\|_{\overline{\Omega}_j, k}} \cdot \underbrace{\sup_{x \in \overline{\Omega}_j} |D^\gamma \psi|}_{\leq \|\psi\|_{\overline{\Omega}_j, k}} \leq \underbrace{\left[ \max_{|\alpha| \leq k} \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \frac{\alpha!}{\beta!\gamma!} \right]}_{C_k} \cdot \|\varphi\|_{\overline{\Omega}_j, k} \|\psi\|_{\overline{\Omega}_j, k} \end{aligned}$$

(iii) Für konvergente Folgen  $\varphi_\nu \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} \varphi$ ,  $\psi_\nu \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} \psi$  in  $\mathcal{C}(\Omega)$ , ist auch  $\varphi_\nu \cdot \psi_\nu \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} \varphi \cdot \psi$  in  $\mathcal{C}(\Omega)$ , denn

$$\begin{aligned} \|\varphi_\nu \psi_\nu - \varphi \psi\|_{\overline{\Omega}_j, k} &\leq \|(\varphi_\nu - \varphi) \psi_\nu\|_{\overline{\Omega}_j, k} + \|(\psi_\nu - \psi) \varphi\|_{\overline{\Omega}_j, k} \\ &\leq C_k \underbrace{\|\varphi_\nu - \varphi\|_{\overline{\Omega}_j, k}}_{\xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} 0} \cdot \underbrace{\|\psi_\nu\|_{\overline{\Omega}_j, k}}_{\xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} \|\psi\|_{\overline{\Omega}_j, k}} + C_k \underbrace{\|\psi_\nu - \psi\|_{\overline{\Omega}_j, k}}_{\xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} 0} \underbrace{\|\varphi_\nu\|_{\overline{\Omega}_j, k}}_{\xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} \|\varphi\|_{\overline{\Omega}_j, k}} \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

(iv) Sei  $\Omega' \subset \mathbb{R}^n$  auch offen und  $\tau : \Omega' \rightarrow \Omega$  ein  $\mathcal{C}^\infty$ -Diffeomorphismus. Dazu Ausschöpfungsfolge  $\Omega'_j := \tau^{-1}(\Omega_j)$  von  $\Omega'$  (vgl. Transformationslemma 2.2.2). Dann gilt für  $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$  die Abschätzung

$$\|\varphi \circ \tau\|_{\overline{\Omega}'_j, k} \leq C_{k, \tau} \cdot \|\varphi\|_{\overline{\Omega}_j, k}$$

für irgendwelche Konstanten  $C_{j, k, \tau} \in \mathbb{R}$ .

**Beweis:** Induktion über  $k$ . Der Fall  $k = 0$  ist klar, denn es ist stets

$$\sup_{x \in \overline{\Omega}'_j} |\varphi \circ \tau| = \sup_{y \in \overline{\Omega}_j} |\varphi(y)|$$

Es gelte nun die Aussage für ein  $k \in \mathbb{N}_0$ . Dann ist für  $|\alpha| \leq k$ :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial}{\partial x^i} \partial^\alpha \varphi \circ \tau \right\|_{\overline{\Omega}'_j} &\stackrel{\text{Schwarz}}{=} \left\| \partial^\alpha \left( \frac{\partial}{\partial x^i} (\varphi \circ \tau) \right) \right\|_{\overline{\Omega}'_j} = \left\| \partial^\alpha \left( \sum_l \frac{\partial \varphi}{\partial x^l}(\tau) \cdot \frac{\partial \tau^l}{\partial x^i} \right) \right\|_{\overline{\Omega}'_j} \\ &\leq \sum_l \left\| \partial^\alpha \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x^l}(\tau) \cdot \frac{\partial \tau^l}{\partial x^i} \right) \right\|_{\overline{\Omega}'_j} \leq \sum_i \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x^l}(\tau) \cdot \frac{\partial \tau^l}{\partial x^i} \right\|_{\overline{\Omega}'_j, |\alpha|} \\ &\stackrel{(2.3.6.2)}{\leq} \sum_l C_k \cdot \left\| \frac{\partial \tau^k}{\partial x^j} \right\|_{\overline{\Omega}'_j, k} \cdot \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x^l}(\tau) \right\|_{\overline{\Omega}'_j, k} \stackrel{\text{I.V.}}{\leq} \sum_l C_k \cdot \left\| \frac{\partial \tau^k}{\partial x^j} \right\|_{\overline{\Omega}'_j, k} \cdot C_{j, k, \tau} \cdot \underbrace{\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x^l} \right\|_{\overline{\Omega}_j, k}}_{\leq \|\varphi\|_{\overline{\Omega}_j, k+1}} \\ &\leq \underbrace{\left[ \sum_l C_k C_{j, k, \tau} \cdot \left\| \frac{\partial \tau^k}{\partial x^j} \right\|_{\overline{\Omega}'_j, k} \right]}_{C_{j, k+1, \tau}} \cdot \|\varphi\|_{\overline{\Omega}_j, k+1} \end{aligned}$$

(v) Sei  $\Omega' \subset \mathbb{R}^n$  auch offen und  $\tau : \Omega' \rightarrow \Omega$  ein  $C^\infty$ -Diffeomorphismus. Gehen  $\varphi_\nu \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} \varphi$  in  $\mathcal{C}(\Omega)$ , so gehen  $\varphi_\nu \circ \tau \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} \varphi \circ \tau$  in  $\mathcal{C}(\Omega')$ .

**Beweis:**  $\Omega'$  sei ausgestattet mit der Ausschöpfungsfolge  $\Omega'_j := \tau^{-1}(\Omega_j)$  (vgl. (iv)). Dann:

$$\|(\varphi_\nu - \varphi) \circ \tau\|_{\overline{\Omega'_j}, k} \leq \underbrace{C_{j,k,\tau}}_{\text{const}} \cdot \|\varphi_\nu - \varphi\|_{\overline{\Omega_j}, k} \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} 0$$

### 2.3.7 Topologische Aspekte von $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$

Wie sich herausstellt, ist  $\mathcal{C}_0^\infty$  bzgl. des obigen Konvergenzbegriffes (Ausdr. 2.3.6.1) nicht vollständig. Als Beispiel sei die Funktionenfolge

$$\varphi_j(x) := \begin{cases} 1 & : x \in \overline{\Omega_j} \\ 0 & : x \in \Omega \setminus \Omega_{j+1} \\ \text{glatt} & \text{dazwischen} \end{cases}$$

betrachtet. Dann geht  $\varphi_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 1$  bzgl. des in  $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$  Konvergenzbegriffes. Doch ist  $1 \notin \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ .

Führen deshalb einen neuen Konvergenzbegriff ein: Wir sagen  $\varphi_\nu \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} \varphi : \Leftrightarrow$

- $\exists K \subset \Omega$  kompakt und  $\text{supp}(\varphi_\nu), \text{supp}(\varphi) \subset K$
- $D^\alpha \varphi_\nu \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} D^\alpha \varphi$  gleichmäßig auf  $K \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n$ , d.h.

$$\|D^\alpha \varphi_\nu - D^\alpha \varphi\|_\infty \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n$$

bzw. äquivalent dazu:

$$\|\varphi_\nu - \varphi\|_{K,k} \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$$

#### Bemerkungen:

- Oft setzt man diesen Konvergenzbegriff in  $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$  als gegeben voraus, und schreibt  $\mathfrak{D}(\Omega)$  für  $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ .
- $\mathfrak{D}(\Omega)$  ist vollständig, jedoch nicht metrisierbar.
- In Abschnitt 2.4.1 wird gezeigt:  $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \neq \emptyset$ .
- Analog zu  $\mathcal{C}(\Omega)$ , gilt auch hier: Für zwei konvergente Folgen  $\varphi_\nu \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} \varphi$ ,  $\psi_\nu \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} \psi$  in  $\mathfrak{D}(\Omega)$ , geht auch  $\varphi_\nu \psi_\nu \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} \varphi \psi$  in  $\mathfrak{D}(\Omega)$ , denn  $\text{supp}(\varphi_\nu \psi_\nu) \subset \text{supp}(\varphi_\nu) \subset K$  und  $\|\varphi_\nu \psi_\nu - \varphi \psi\|_{K,k} \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} 0$  (vgl. Gl. 2.3.6.2).
- Sei  $\Omega' \subset \mathbb{R}^n$  auch offen und  $\tau : \Omega' \rightarrow \Omega$  ein  $C^\infty$ -Diffeomorphismus. Gehen  $\varphi_\nu \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} \varphi$  in  $\mathfrak{D}(\Omega)$ , so gehen  $\varphi_\nu \circ \tau \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} \varphi \circ \tau$  in  $\mathfrak{D}(\Omega')$ , denn

$$\text{supp } \varphi_\nu \circ \tau \subset \tau^{-1}(\text{supp } \varphi_\nu) \subset \underbrace{\tau^{-1}(K)}_{\text{kompakt}}$$

und  $\|\varphi_\nu \circ \tau - \varphi \circ \tau\|_{K,k} \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} 0$  (vgl. 2.3.6 Bemerkung (v)).

### 2.3.8 Lemma: Einbettung der Funktionenräume

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen. Dann:

1.  $\mathfrak{D}(\Omega)$  ist stetig in  $\mathcal{C}(\Omega)$  eingebettet:

$$\mathfrak{D}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}(\Omega)$$

das heißt  $\mathfrak{D}(\Omega) \subseteq \mathcal{C}(\Omega)$  und für  $\psi_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \psi$  gilt auch  $\psi_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \psi$  in  $\mathfrak{D}(\Omega)$ . Speziell gilt sogar

$$\mathfrak{D}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow S(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$$

2. Sind  $\psi, (\psi_k) \subseteq \mathfrak{D}(\Omega)$  mit  $\psi_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\mathcal{C}(\Omega)}$  und  $\text{supp}(\psi), \text{supp}(\psi_k) \subseteq K$  für irgendeine Kompakte  $K \subseteq \Omega$ , so gehen sogar  $\psi_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\mathfrak{D}(\Omega)} \psi$ .
3.  $\mathfrak{D}(\Omega)$  ist dicht in  $\mathcal{C}(\Omega)$ , im Sinne dass für  $\psi \in \mathcal{C}(\Omega)$  stets eine Folge  $(\psi_k) \subseteq \mathfrak{D}(\Omega)$  existiert mit  $\psi_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\mathcal{C}(\Omega)} \psi$ .

**Beweis:**

1. Klar.
2. Klar.
3. Zu Ausschöpfungsfolge  $(\Omega_k)_{k \in \mathbb{N}}$  von  $\Omega$  existieren  $\eta_k \in C_0^\infty(\Omega)$  mit  $\eta|_{|\Omega|_k} = 1$  (siehe später Lemma 2.4.4). Insbesondere sind  $\psi\eta_k \in \mathfrak{D}(\Omega)$ . Wegen  $\eta_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\mathcal{C}(\Omega)} 1$  gehen auch  $\eta_k\psi \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\mathcal{C}(\Omega)} \psi$ .

□

## 2.4 Zerlegungen der Eins

### 2.4.1 Vorbetrachtung

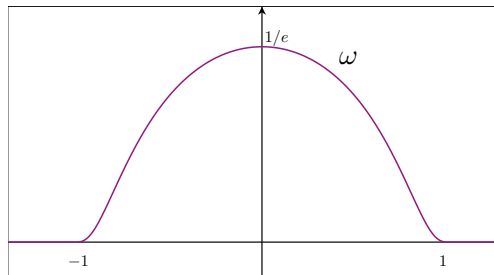
Betrachten die Funktion

$$\omega(t) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-t^2}} & |t| < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist  $\omega$  stetig auf  $\mathbb{R}$  mit  $\text{supp}(\omega) = [-1, 1]$  und

$$\omega^{(k)}(t) = \frac{P_k(t)}{(1-t^2)^{2k}} \cdot \omega(t) \quad , \quad P_k : \text{Polynom vom Grad } \leq k$$

das heißt  $\omega \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ .



**Abbildung 1:** Zur Definition von  $\omega$  in einer Dimension.

Die  $n$ -dimensionale Verallgemeinerung

$$\omega(x) := \begin{cases} ce^{-\frac{1}{1-\|x\|^2}} & \|x\| < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad , \quad c > 0$$

ist ebenfalls glatt mit  $\text{supp}(\omega) = B_1^n$ . Dabei wird  $c$  so gewählt dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} \omega \, d^n x = 1$$

ist. Ist nun  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen, so existiert ein  $x_0 \in \Omega$  und  $\varepsilon > 0$  so dass  $B_{2\varepsilon}(x_0) \subset \Omega$ . Setzt man nun

$$\omega_{\varepsilon, x_0}(x) := \omega_\varepsilon(x - x_0) := \frac{1}{\varepsilon^n} \omega\left(\frac{x - x_0}{\varepsilon}\right) \quad , \quad (2.4.1.1)$$

so ist  $\omega_{\varepsilon, x_0} \in C_0^\infty(\Omega)$  und erfüllt

$$\int_{\Omega} \omega_{\varepsilon, x_0} d^n x = 1$$

### 2.4.2 Lemma: Glättung mit $\omega_h$

Sei  $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ ,  $1 \leq p < \infty$ . Dann gilt für die Faltung

$$f_h(x) := (f * \omega_h)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(z) \omega_h(x-z) d^n z = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-hz) \omega(z) d^n z$$

und jedes  $h > 0$ :

1.  $f_h$  ist glatt.
2.  $\|f_h\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$ .
3.  $\|f_h - f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} 0$ .
4.  $\text{supp}(f_h) \subset (\text{supp}(f))_h := \bigcup_{x \in \text{supp}(f)} B_h(x)$ .

**Beweis:**

1. Betrachten für  $0 < t < 1$ ,  $\nu \in \mathbb{R}^n$ ,  $\|\nu\| = 1$  und festes  $x \in \mathbb{R}^n$  den Differenzenquotient

$$\frac{f_h(x+t\nu) - f_h(x)}{t} = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{t} \underbrace{[\omega_h(x+t\nu-z) - \omega_h(x-z)]}_{g_t(z)} f(z) d^n z = \int_{\mathbb{R}^n} g_t(z) d^n z$$

Dann ist nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung

$$|g_t(z)| \leq \tilde{C} \cdot |\tilde{f}(z)|$$

mit

$$\tilde{C} := \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial \omega_h}{\partial \nu}(y) \right| < \infty, \quad \tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & : z \in B_{1+h}(x) \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}.$$

Außerdem ist nach der Hölderschen Ungleichung

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{f}(z)| d^n z \leq \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} < \infty$$

da  $\text{supp}(\tilde{f})$  beschränkt ist. Da Punktweise

$$g_t(z) \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{\partial \omega_h}{\partial \nu}(x-z) f(z),$$

existiert nach dem Satz von Lebesgue das Integral

$$\lim_{t \rightarrow 0} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} g_t(z) d^n z}_{\frac{\partial f_h}{\partial \nu}(x)} = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{t \rightarrow 0} g_t(z) dz = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \omega_h}{\partial \nu}(x-z) f(z) d^n z < \infty$$

und somit auch die Ableitung  $\partial_\nu f_h(x)$ . In obigen Überlegungen wurde von  $\omega_h$  nur die Beschränktheit von  $\partial_\nu \omega_h$  und Kompaktheit von  $\text{supp}(\omega_h)$  benutzt. Es kann also iterativ auf analoger Weise die Existenz aller höheren Ableitungen von  $f_h$  gezeigt werden.

2. Mit

$$|f_h(x)|^p \stackrel{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1}{=} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x - hz) \omega(z)^{1/p} \omega(z)^{1/q} d^n z \right|^p \stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \left\{ \left[ \int_{\mathbb{R}^n} |f(x - hz)|^p \omega(z)^{\frac{p}{p}} d^n z \right]^{\frac{1}{p}} \underbrace{\left[ \int_{\mathbb{R}^n} \omega(z)^{\frac{q}{q}} d^n z \right]^{\frac{1}{q}}}_1 \right\}^p$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x - hz)|^p \omega(z) d^n z$$

(bemerke dass für  $p = 1$  die Aussage trivial ist) erhält man

$$\|f_h\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}^p = \int_{\mathbb{R}^n} |f_h(x)|^p d^n x \leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x - hz)|^p \omega(z) d^n z d^n x \stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \omega(z) \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} |f(x - hz)|^p d^n x}_{\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}^p} d^n z$$

$$= \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}^p \cdot \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \omega(z) d^n z}_1 = \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}^p$$

und somit

$$\|f_h\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$$

3. Wegen  $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$  existiert  $\forall \delta > 0$  eine stetige Funktion  $g_\delta \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$  mit  $\text{supp}(g_\delta)$  kompakt und

$$\|f - g_\delta\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} < \delta$$

Dann ist wegen

$$\begin{aligned} \|f_h - f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} &\leq \underbrace{\|\omega_h * f - \omega_h * g_\delta\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}_{(f-g_\delta)_h} + \underbrace{\|\omega_h * g_\delta - g_\delta\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}_{(g_\delta)_h} + \underbrace{\|g_\delta - f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}_{< \delta} \\ &\leq \|f - g_\delta\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \quad \text{nach 2.} \\ &\leq \underbrace{\|f - g_\delta\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}}_{< \delta} + \|(g_\delta)_h - g_\delta\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + \delta \\ &< 2\delta + \|(g_\delta)_h - g_\delta\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

und der Willkür von  $\delta$  das Problem zurückführbar auf den Spezialfall stetiger Abbildungen  $g_\delta$  mit kompaktem Träger.

Wir setzen für Menge  $A \subset \mathbb{R}^n$  und  $h \geq 0$ :

$$A_h := \{x \in \mathbb{R}^n : A \cap B_h(x) \neq \emptyset\} = \bigcup_{x \in B} B_h(x) \quad (2.4.2.1)$$

Ist  $A$  beschränkt, so ist offensichtlich auch  $A_h$  beschränkt, und  $\text{vol}_n(A_h)$  ist monoton wachsend in  $h$ .

Da  $g_\delta$  stetig ist mit Kompaktem träger, ist  $g_\delta$  sogar gleichmäßig stetig, das heißt für  $\sigma > 0$  existiert stets ein  $\varepsilon > 0$  mit

$$|g_\delta(x) - g_\delta(x')| < \sigma \quad \forall \|x - x'\| \leq \varepsilon$$

also insbesondere

$$|g_\delta(x - hz) - g_\delta(x)| < \sigma \quad \forall \|hz\| < \varepsilon$$



Somit kann man für  $h < \varepsilon$  abschätzen

$$|(g_\delta)_h(x) - g_\delta(x)| = \left| \int_{B_1^n} |g_\delta(x - hz) - g_\delta(x)| \omega(z) d^n z \right| \leq \sigma \underbrace{\int_{B_1^n} \omega(z) d^n z}_1 = \sigma$$

bzw.

$$\|(g_\delta)_h - g_\delta\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p = \int_{\mathbb{R}^n} |(g_\delta)_h(x) - g_\delta(x)|^p d^n x \leq \sigma^p \cdot \underbrace{\text{vol}_n[\text{supp}(g_\delta)]_h}_{\text{beschränkt für } h < 1}$$

das heißt für genügend kleine Wahl von  $h$  wird  $\|(g_\delta)_h - g_\delta\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$  beliebig klein.

4. Folgt aus  $\text{supp}(\omega_h) = B_h(0)$ .

□

### 2.4.3 Lemma über Mengenabstände

Sei  $\Omega^o \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $\Omega \subset \Omega^o$  kompakt. Dann gilt

$$d(\Omega, \partial\Omega_0) := \inf \{\|x - y\| : x \in \Omega, y \in \partial\Omega_0\} > 0$$

**Beweis** durch Widerspruch. Sei  $d(\Omega, \partial\Omega_0) = 0$ , dann existiert eine Folge  $(x_k)_k \in \Omega$  so dass  $d(x_k, \partial\Omega) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ . Da  $\Omega$  kompakt ist, existiert eine in  $\Omega$  konvergente Teilfolge  $x_{k_i} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} x \in \Omega$ . Der Punkt  $x \in \Omega$  ist dann offensichtlich ein Häufungspunkt von  $\partial\Omega_0$ , also  $x \notin \Omega$ , ein Widerspruch!

□

### 2.4.4 Lemma: Existenz abklingender Funktionen

Es seien  $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$  offene Mengen mit  $\bar{\Omega}_1 \subset \Omega_2$  kompakt. Dann existiert eine reellwertige Funktion

$$\varphi \in C_0^\infty(\Omega_2)$$

mit

$$0 \leq \varphi(x) \leq 1 \quad \text{für } x \in \Omega_2$$

und  $\varphi|_{\bar{\Omega}_1} = 1$ .

**Beweis:** Nach Lemma 2.4.3 ist  $d(\bar{\Omega}_1, \partial\Omega_2) =: \delta > 0$ . Die Funktion

$$\varphi(x) := [1_{(\bar{\Omega}_1)_{\frac{\delta}{3}}}] * \omega_h, \quad 0 < h < \frac{\delta}{3}$$

erfüllt genau die Voraussetzungen.

### 2.4.5 Lemma: Zerlegung der Einheit

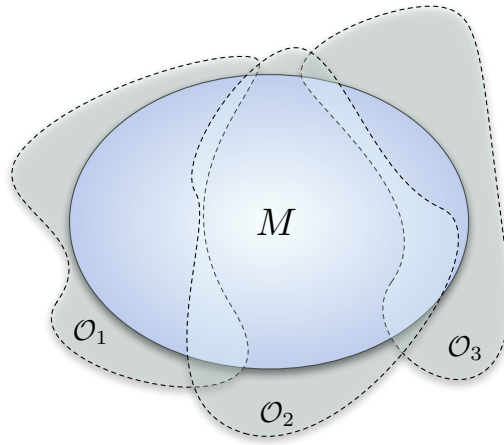
Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  kompakt und  $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_N$  offene Mengen mit

$$M \subset \bigcup_{i=1}^N \mathcal{O}_i$$

Dann existieren Funktionen  $\varphi_i \in C_0^\infty(\mathcal{O}_i)$  mit  $0 \leq \varphi_i \leq 1$  und

$$\sum_{i=1}^N \varphi_i(x) = 1, \quad x \in M$$

(Zerlegung der Einheit).



**Abbildung 2:** Überdeckung von  $M$  durch offene Mengen  $\mathcal{O}_i$ .

**Beweis:** Setze

$$\mathcal{O}_i^\delta := \{x \in \mathcal{O}_i : d(x, \partial\mathcal{O}_i) > \delta\}$$

für  $\delta > 0$ . Dann  $\exists \delta_0 > 0$  so dass immer noch

$$M \subset \bigcup_{i=1}^N \mathcal{O}_i^{\delta_0}$$

Setzen wir

$$M_h := \{x \in \mathbb{R}^n : M \cap B_h(x) \neq \emptyset\}$$

$$M_h^o := \{x \in \mathbb{R}^n : M \cap B_h^o(x) \neq \emptyset\} \supset M$$

dann existiert ein  $h_0 > 0$  so dass

$$M_h \subset \bigcup_{i=1}^N \mathcal{O}_i^{\delta_0} \quad \forall 0 \leq h < h_0$$

Außerdem ist  $\overline{\mathcal{O}_i^{\delta_0}} \subset \mathcal{O}_i$ , so dass nach Lemma 2.4.4  $\psi_i \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{O}_i)$  existieren mit

$$\psi_i \Big|_{\mathcal{O}_i^{\delta_0}} = 1, \quad 0 \leq \psi_i \leq 1$$

das heißt

$$\sum_{i=1}^N \psi_i(x) \geq 1, \quad x \in M_h$$

Nach Lemma 2.4.4 existiert außerdem ein  $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(M_h^o)$  mit  $\psi|_M = 1$ . Die Funktion

$$\varphi_i(x) := \frac{\psi_i(x)}{\sum_{i=1}^N \psi_i(x)} \cdot \psi(x)$$

erfüllt nun die Bedingungen.

□

### 3 Distributionen - Verallgemeinerte Funktionen

#### 3.1 Vorbetrachtung

Im folgenden sei  $\Omega$  offen und  $X = \mathfrak{D}(\Omega)$  (2.3.7) bzw.  $X = \mathcal{C}(\Omega)$  (2.3.6) bzw.  $X = S(\mathbb{R}^n)$  (2.3.2), jeweils ausgestattet mit einer Familie  $(\|\cdot\|_k)_{k \in \mathbb{N}}$  von Halbnormen bzw. dem entsprechenden Konvergenzbegriff.

##### 3.1.1 Definition: Distribution auf $X$

Eine  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung

$$u : X \rightarrow \mathbb{C} \quad , \quad \varphi \mapsto \langle u, \varphi \rangle$$

heißt *stetig* (folgenstetig)  $\Leftrightarrow$

$$\forall \varphi_\nu \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} \varphi \in X : \langle u, \varphi_\nu \rangle \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} \langle u, \varphi \rangle$$

Der Raum der linearen, stetigen Funktionale auf  $X$  wird mit  $X' := \mathcal{L}(X, \mathbb{C})$  bezeichnet, seine Elemente auch *Distributionen*.

**Notation:** Zu  $U \subset \Omega$  und Distribution  $u$  auf  $\mathfrak{D}(\Omega)$  nennen wir

$$u|_U : \{\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega) : \text{supp}(\varphi) \subset U\} \rightarrow \mathbb{C} \quad , \quad \varphi \mapsto u(\varphi)$$

die *Einschränkung von  $u$  auf  $U$* . Analog auch für  $\mathcal{C}(\Omega)$  und  $S(\mathbb{R}^n)$ .

##### 3.1.2 Satz: Charakterisierung der Stetigkeit

Eine lineare Abbildung  $u : X \rightarrow \mathbb{C}$  (im Fall  $X = S(\mathbb{R}^n)$  oder  $X = \mathcal{C}(\Omega)$ ) ist genau dann stetig wenn

$$\exists C_u \geq 0, l_u \in \mathbb{N} : |\langle u, \varphi \rangle| \leq C \cdot \max_{1 \leq k \leq l_u} \|\varphi\|_k \quad \forall \varphi \in X$$

**Spezialfälle:**

$X = S(\mathbb{R}^n)$ :

$$\|\varphi\|_k := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \langle x \rangle^k \sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha \varphi(x)|$$

$X = \mathcal{C}(\Omega)$ : Für Ausschöpfungsfolge  $\Omega_1, \Omega_2, \dots$  von  $\Omega$ :

$$\|\varphi\|_k := \|\varphi\|_{\overline{\Omega}_k, k} = \sup_{\substack{x \in \overline{\Omega}_k \\ |\alpha|=k}} |D^\alpha \varphi(x)|$$

$X = \mathfrak{D}(\Omega)$ : Für Ausschöpfungsfolge  $\Omega_1, \Omega_2, \dots$  von  $\Omega$  ist  $u$  stetig genau dann wenn

$$\exists C_u \geq 0 : \forall j \in \mathbb{N} : \exists l_{u,j} : |\langle u, \varphi \rangle| \leq C_u \cdot \sup_{\substack{x \in \overline{\Omega}_j \\ |\alpha| \leq l_{u,j}}} |D^\alpha \varphi(x)| \quad \forall \varphi \in X$$

##### 3.1.3 $X'$ als linearer Raum

Der Raum  $X'$  aller linearen, stetigen Funktionale auf  $X \in \{\mathfrak{D}(\Omega), \mathcal{C}(\Omega), S(\mathbb{R}^n)\}$  ist ebenfalls ein Vektorraum:

$$\langle \lambda u + \mu v, \varphi \rangle := \lambda \langle u, \varphi \rangle + \mu \langle v, \varphi \rangle \quad , \quad u, v \in X', \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \varphi \in X$$

Dabei führt man in  $X'$  die so genannte *schwache\** (punktweise) Konvergenz

$$u_\nu \xrightarrow[\text{schwach}^*]{\nu \rightarrow \infty} u \in X' \quad :\Leftrightarrow \quad \langle u_\nu, \varphi \rangle \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} \langle u, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in X$$

ein, und definiert eine Folge  $(u_\nu) \subset X'$  als *Cauchy*, falls die komplexwertige Folge  $\langle u_\nu, \varphi \rangle$  für beliebiges  $\varphi \in X$  Cauchy ist. In diesem Kontext ist dann  $X'$  vollständig, denn für Cauchy-Folge  $(u_\nu) \subset X'$  ist

$$u_\nu \xrightarrow[\text{punktweise}]{\nu \rightarrow \infty} \underbrace{\left( \varphi \mapsto \left( \lim_{\nu \rightarrow \infty} \langle u_\nu, \varphi \rangle \right) \right)}_{\in X'}$$

### 3.1.4 Bemerkung zur Distributionen-Einbettung

Nach Lemma 2.3.8 gilt  $\mathcal{C}'(\Omega) \subseteq \mathfrak{D}'(\Omega)$  für  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen, und speziell sogar

$$\mathcal{C}'(\mathbb{R}^n) \subseteq S'(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^n)$$

Siehe später Fortsetzungssatz 3.3.1 für die umgekehrte Richtung. Im Kontext der schwachen Konvergenz von Distributionen, gilt sogar

$$\boxed{\mathcal{C}'(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow S'(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^n)}$$

### 3.1.5 Vergleich mit $\mathbb{C}^n$

Für  $X = \mathbb{C}^n$  und  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ ,  $x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{C}^n$  sei betrachtet das Skalarprodukt

$$\langle \xi, x \rangle := \sum_{j=1}^n \xi_j x^j$$

Dann ist  $x \mapsto \langle \xi, x \rangle$  eine stetige Linearform auf  $\mathbb{C}^n$ . Umgekehrt, kann jede Linearform  $u : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$  durch solch ein  $\xi \in \mathbb{C}^n$  dargestellt werden:

$$\xi_j := \langle u, \mathbf{e}_j \rangle \Rightarrow \langle u, x \rangle = \langle \xi, x \rangle$$

Die Zuordnung  $u \rightarrow \xi$  ist eindeutig und sogar ein Isomorphismus, das heißt

$$(\mathbb{C}^n)' \cong \mathbb{C}^n$$

Analog, ist für  $1 \leq p < \infty$ , der Raum

$$l_p := \left\{ (x_j)_{j \in \mathbb{N}} : \|x\|_p := \sqrt[p]{\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p} < \infty \right\}$$

isomorph zu  $(l_q)'$ , wobei  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Schließlich ist auch

$$L_p := \left\{ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \mid \|f\|_p := \sqrt[p]{\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p} < \infty \right\} \cong L_q$$

Ziel ist es nun, eine möglichst große Teilmenge von  $X'$  als Funktionen zu interpretieren.

### 3.1.6 Definition: $L_{p,\text{loc}}$

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $1 \leq p \leq \infty$  beliebig. Dann definiert man

$$L_{p,\text{loc}}(\Omega) := \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_K |f(x)|^p dx < \infty \quad \forall K \subset \Omega \text{ kompakt} \right\}$$

als die Menge aller *lokal- $p$ -integrierbaren* (*lokal-integrierbaren* falls  $p = 1$ ) Funktionen auf  $\Omega$ .

### Beispiele:

- (i) Polynome und allgemein stetige Funktionen gehören zu  $L_{1,\text{loc}}$ .
- (ii) Für  $1 \leq p \leq \infty$  ist  $L_p(\Omega) \subseteq L_{p,\text{loc}}(\Omega) \subseteq L_{1,\text{loc}}(\Omega)$ .
- (iii) Zwar ist  $\frac{1}{x} \notin L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R})$ , jedoch  $\frac{1}{x} \in L_{1,\text{loc}}((0, 1))$ .

### 3.1.7 Satz über Funktionen in $L_{1,\text{loc}}(\Omega)$

Sei  $\Omega$  offen und  $f \in L_{1,\text{loc}}(\Omega)$ . Dann definiert  $f$  eine Distribution in  $\mathfrak{D}'(\Omega)$  durch

$$\langle f, \varphi \rangle := \langle u_f, \varphi \rangle := \int_{\Omega} f(x)\varphi(x) dx \quad , \quad \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$$

Ferner ist  $f$  eindeutig (bis auf Nullmengen) durch  $u_f$  bestimmt. Die so erzeugbaren Funktionale heißen *reguläre Distributionen*, der Rest *singuläre Distributionen*. In einem gewissen Sinne stellen Distributionen somit eine *Verallgemeinerung* von Funktionen dar.

**Beweis:** Tatsächlich ist dieses Integral endlich und somit  $u_f$  wohldefiniert, denn

$$\left| \int_{\Omega} f \cdot \varphi dx \right| \leq \int_{\Omega} |f(x)| \underbrace{|\varphi(x)|}_{\leq \|\varphi\|_{\infty}} dx \leq \|\varphi\|_{\infty} \cdot \underbrace{\int_{\text{supp}(\varphi)} |f(x)| dx}_{\substack{< \infty \\ \text{da supp}(\varphi) \\ \text{kompakt}}} < \infty$$

Andererseits ist  $u_f$  stetig, denn für  $\varphi_{\nu} \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$  (also insbesondere  $\text{supp}(\varphi_{\nu}), \text{supp}(\varphi) \subset K$  für irgendein  $K \subset \Omega$  kompakt) ist

$$|\langle u_f, \varphi_{\nu} \rangle - \langle u_f, \varphi \rangle| \leq \int_K |f(x)| \cdot |\varphi_{\nu}(x) - \varphi(x)| dx \leq \underbrace{\int_K |f(x)| dx}_{C_{f,K} < \infty} \cdot \underbrace{\sup_{x \in K} |\varphi_{\nu}(x) - \varphi(x)|}_{\|\varphi_{\nu} - \varphi\|_{\infty}} \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} 0$$

Definiert man nun bzgl. der Äquivalenzrelation

$$f \sim g \quad :\Leftrightarrow \quad f = g \pmod{0} \quad , \quad f, g \in L_{1,\text{loc}}$$

die Äquivalenzklassen

$$[f] := \{g \in L_{1,\text{loc}} : g = f \text{ fast überall auf } \Omega\}$$

so ist die Zuordnung  $[f] \mapsto u_f$  wohldefiniert und nach Lemma 3.1.11 eineindeutig.

□

### 3.1.8 Bemerkung zur Einbettung von $L_p$ Räumen in $S'(\mathbb{R}^n)$

Sei  $1 \leq p \leq \infty$ .

1. Ist  $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$  (vgl. Bem (ii) in 3.1.6) so ist sogar  $u_f \in S'(\mathbb{R}^n)$ .
2. Konvergieren  $f_n \xrightarrow[L_p]{n \rightarrow \infty} f$  so konvergieren auch die Distributionen  $u_{f_n} \xrightarrow[\text{schwach}^*]{n \rightarrow \infty} u_f$ .

Zusammengefasst also:

$$\boxed{L_p(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow S'(\mathbb{R}^n) \quad , \quad 1 \leq p \leq \infty} \quad (3.1.8.1)$$

**Beweis:**

1. Sei  $1 \leq p \leq \infty$  und  $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ . Dann

$$\overbrace{\left| \int_{\mathbb{R}^n} f \cdot \varphi dx \right|}^{\langle u_f, \varphi \rangle} \leq \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} |f \cdot \varphi| dx}_{\|f \cdot \varphi\|_{L_1}} \stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \|f\|_{L_p} \cdot \underbrace{\|\varphi\|_{L_{\frac{p}{p-1}}}}_{< \infty} \quad , \quad \varphi \in S(\mathbb{R}^n)$$

Stetigkeit von  $u_f$  in  $S(\mathbb{R}^n)$  folgt aus obiger Abschätzung.

2. Folgt direkt aus der Abschätzung.

□

**3.1.9 Bemerkung zur Einbettung polynomialer Funktionen in  $S'(\mathbb{R}^n)$** 

Sei  $f \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$  so dass  $|f| \in \mathcal{O}(\|x\|^N)$  für  $\|x\| \rightarrow \infty$  und irgendein  $N \geq 0$ . Dann ist  $u_f \in S'(\mathbb{R}^n)$ .

**Beweis:** Nach Voraussetzung existieren  $C, R > 0$  mit  $|f(x)| \leq C \|x\|^N \quad \forall \|x\| \geq R$ . Zu  $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$  können wir daher abschätzen

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f \cdot \varphi \, dx \right| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \cdot |\varphi(x)| \, dx = \underbrace{\int_{B_R(0)} |f(x)| \cdot |\varphi(x)| \, dx}_{\leq C_f \|\varphi\|_\infty} + \int_{\|x\| \geq R} \underbrace{|f(x)|}_{\leq C \|x\|^N} \cdot |\varphi(x)| \, dx \\ &\leq C_f \|\varphi\|_\infty + C \int_{\|x\| \geq R} \underbrace{(1 + \|x\|^2)^{N+n}}_{\leq \|\varphi\|_{0,2(N+n)}} |\varphi(x)| \cdot \|x\|^{-(2n+N)} \, dx \\ &\leq C_f \|\varphi\|_\infty + C'_f \cdot \|\varphi\|_{0,2(N+n)} < \infty \end{aligned}$$

Insbesondere folgt aus der Abschätzung die Stetigkeit von  $u_f$  in  $S(\mathbb{R}^n)$ .

□

**3.1.10 Lemma zur Konvergenz regulärer Distributionen**

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen.

1. Sind  $f, f_k \in L_{1,\text{loc}}(\Omega)$  mit  $f_k \xrightarrow[\|\cdot\|_\infty]{k \rightarrow \infty} f|_K$  auf jeder kompakten  $K \subseteq \Omega$ , so gehen  $u_{f_k} \xrightarrow[\text{schwach}^*]{k \rightarrow \infty} u_f$  in  $\mathfrak{D}'(\Omega)$ .
2. Seien nun  $f_k, f \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$  majorisiert durch irgendeine  $g \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$  mit  $u_g \in S'(\mathbb{R}^n)$ . Gehen  $f_k \xrightarrow[\text{punktweise}]{k \rightarrow \infty} f$  (fast überall), so gehen sogar  $u_{f_k} \xrightarrow[\text{schwach}^*]{k \rightarrow \infty} u_f$  in  $S'(\mathbb{R}^n)$ .

**Beweis:**

1. Sei  $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$ . Dann

$$|\langle u_{f_k} - u_f, \varphi \rangle| = \int_{\text{supp}(\varphi)} |(f_k - f)\varphi| \, dx \leq \text{Vol}(\text{supp}(\varphi)) \cdot \|\varphi\|_\infty \cdot \underbrace{\sup_{x \in K} |f_k(x) - f(x)|}_{\xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

2. Für  $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$  gehen auch  $f_k \cdot \varphi \xrightarrow[\text{punktweise}]{k \rightarrow \infty} f \cdot \varphi$ . Dabei werden  $f_k \varphi$  majorisiert durch die integrierbare  $g\varphi$ , so dass nach Lebesgue folgt

$$\langle u_{f_k}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f_k \varphi \, dx \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f \varphi \, dx = \langle u_f, \varphi \rangle$$

□

**3.1.11 Lemma über Nullfunktionen in  $L_{1,\text{loc}}$** 

Es sei  $\Omega$  offen,  $f \in L_{1,\text{loc}}(\Omega)$  und

$$\int_{\Omega} f(x)\varphi(x) \, dx = 0 \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$$

Dann gilt  $f(x) = 0$  fast-überall auf  $\Omega$ .

**Beweis:** Sei  $\mathcal{O}$  offen, beschränkt mit  $\overline{\mathcal{O}} \subset \Omega$ . Dann ist nach 2.4.3

$$d(\overline{\mathcal{O}}, \partial\Omega) =: \delta > 0$$

Sei nun  $0 < h < \frac{\delta}{2}$  beliebig und  $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{O})$ , dazu

$$\varphi_h := \varphi * \omega_h .$$

Dann ist nach Lemma 2.4.2:

$$\text{supp}(\varphi_h) \subset \mathcal{O}_{\delta/2} \subset \Omega$$

und insbesondere  $\varphi_h \in \mathfrak{D}(\Omega)$ , nach Voraussetzung also

$$0 = \int_{\Omega} f(x) \varphi_h(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(z) \omega_h(x-z) dz dx \stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(z) \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \omega_h(x-z) dx dz$$

$$\stackrel{\substack{\omega_h \\ \text{gerade}}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(z) \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \omega_h(z-x) dx dz = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(z) f_h(z) dz$$

Definieren nun

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & : x \in \mathcal{O}_{\delta/2} \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

Dann gilt  $\tilde{f}_h(z) = f_h(z)$  für  $z \in \mathcal{O}$  und demnach

$$0 = \int_{\Omega} \varphi(z) \tilde{f}_h(z) dz \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{O})$$

wobei jetzt  $\tilde{f}_h \in \mathcal{C}^\infty$  und  $\tilde{f}_h \in L_1(\mathbb{R}^n)$ . Es muss also  $\tilde{f}_h = 0 \quad \forall x \in \mathcal{O}$  sein, und somit

$$\|f\|_{L_1(\mathcal{O})} = \|\tilde{f}\|_{L_1(\mathcal{O})} \leq \underbrace{\|\tilde{f} - \tilde{f}_h\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}}_{\substack{h \rightarrow 0 \\ (2.4.2)}} + \underbrace{\|\tilde{f}_h\|_{L_1(\mathcal{O})}}_0$$

bzw.

$$\|f\|_{L_1(\mathcal{O})} = 0 \quad \Rightarrow \quad f|_{\mathcal{O}} = 0 \pmod{0}$$

Doch da  $\mathcal{O}$  beliebig war, muss  $f = 0$  fast überall auf  $\Omega$  sein.

□

### 3.1.12 Die $\delta$ -Distribution

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Für  $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$  setzen

$$\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle := \varphi(x_0)$$

Dann ist  $\delta_{x_0} : \varphi \mapsto \varphi(x_0)$  eine (singuläre falls  $x_0 \in \Omega$ ) Distribution auf  $\mathfrak{D}(\Omega)$  und heißt  $\delta$ -Distribution oder *Dirac-Distribution*.

**Erläuterung:** Wegen

$$|\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle| = |\varphi(x_0)| \leq \sup_{x \in \Omega} |\varphi(x)| \quad , \quad \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$$

folgt nach 3.1.2 die Stetigkeit von  $\delta_{x_0}$ . Alternativ ist für  $\varphi_\nu \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$  auch

$$|\langle \delta_{x_0}, \varphi_\nu - \varphi \rangle| = |\varphi_\nu(x_0) - \varphi(x_0)| \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} 0$$

Sei nun  $x_0 \in \Omega$ , zu zeigen wäre die nicht-Regularität von  $\delta_{x_0}$ . Wäre  $f \in L_{1,\text{loc}}(\Omega)$  und

$$\int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx = \varphi(0) \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$$

so müsse insbesondere mit  $x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$  gelten

$$\int_{\Omega} f(x) [(x^i - x_0^i)\varphi(x)] dx = [(x^i - x_0^i)\varphi(x)] \Big|_{x=x_0} = 0$$

und damit

$$\int_{\Omega} [f(x)(x^i - x_0^i)] \varphi(x) dx = 0 \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$$

Nach Lemma 3.1.11 ist als  $(x^i - x_0^i)f(x) = 0$  bzw.  $f(x) = 0$  fast überall auf  $\Omega$ , also  $\delta_{x_0} = 0$ , was wegen  $x_0 \in \Omega$  nicht sein kann!  $\square$

### Verallgemeinerungen:

- (i) Zu (stückweiser) glatter Fläche  $S \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$  sei  $\mu : S \rightarrow \mathbb{R}$  stückweise stetig. Dann definiert ähnlich wie vorhin

$$\langle \mu \delta_S, \varphi \rangle := \underbrace{\int_S \mu(x) \varphi(x) ds}_{\text{Oberflächenintegral}}, \quad \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$$

eine Distribution auf  $\mathfrak{D}(\Omega)$ . Interpretiert man **formal**  $\mu \delta_S$  als Funktion, so ist  $\mu(x) \delta_S(x) = 0$  für  $x \notin S$ , denn  $\exists B_\delta^o(x) \cap S = \emptyset$  und demnach

$$\langle \mu \delta_S, \varphi \rangle = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(B_\delta^o(x))$$

- (ii) Die Abbildung

$$\langle u, \varphi \rangle := \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \varphi(k), \quad \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$$

ist linear und stetig, da für  $\varphi_\nu \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$  mit  $\text{supp}(\varphi_\nu), \text{supp}(\varphi) \subset K \subset \Omega$  : kompakt gilt:

$$|\langle u, \varphi_\nu - \varphi \rangle| \leq \sum_{k \in K \cap \mathbb{Z}^n} |\varphi_\nu(k) - \varphi(k)| \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} 0$$

### 3.1.13 Distributionen durch reguläre Maße

Jedes reguläre<sup>2</sup> Borel-Maß  $\mu$  auf  $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$  bestimmt durch

$$\langle \mu, \varphi \rangle := \int_{\Omega} \varphi d\mu, \quad \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$$

eine Distribution. Dabei ist die Zuordnung  $\mu \mapsto \langle \mu, \cdot \rangle$  injektiv.

### 3.1.14 Der Cauchysche Hauptwert als Distribution

Betrachten die Abbildung

$$\left(x \mapsto \frac{1}{x}\right) \notin L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R})$$

und definieren auf  $\mathfrak{D}(\mathbb{R})$  die Abbildung  $\mathcal{P}_{\frac{1}{x}}$  durch

$$\langle \mathcal{P}_{\frac{1}{x}}, \varphi \rangle := \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx, \quad \varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R})$$

Dann ist  $\mathcal{P}_{\frac{1}{x}}$  eine Distribution und  $\langle \mathcal{P}_{\frac{1}{x}}, \varphi \rangle$  heißt *Cauchyscher Hauptwert (valeur principale)* von  $\varphi$ .

<sup>2</sup>Ein Borel-Maß  $\mu$  auf einem topologischen Raum  $(T, \mathcal{B}(T))$  heißt regulär falls für jedes  $A \in \mathcal{B}(T)$  gilt:

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \sup \{ \mu(K) : K \subset A, A \text{ kompakt} \} \\ &= \inf \{ \mu(U) : A \subset U, U \text{ offen} \} \end{aligned}$$



**Erläuterung:** Für beliebiges  $R > 0$  ist

$$\int_{R \geq \|x\| \geq \varepsilon} \frac{1}{x} dx = 0$$

Da  $\text{supp}(\varphi) \subset (-R_\varphi, R_\varphi)$  ist für irgendein  $R_\varphi > 0$ :

$$\int_{\|x\| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \int_{R_\varphi \geq \|x\| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \int_{R_\varphi \geq \|x\| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx = \underbrace{\int_{R_\varphi \geq \|x\| \geq \varepsilon} \varphi'(\vartheta(x)x) dx}_{\text{eigentliches Integral}}$$

für eine Funktion  $0 \leq \vartheta \leq 1$  auf  $\mathbb{R}$  (vgl. Mittelwertsatz). Demnach

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\|x\| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \int_{R_\varphi \geq \|x\|} \varphi'(\vartheta(x)x) dx < \infty$$

Insbesondere ist

$$|\langle \mathcal{P}_{\frac{1}{x}}, \varphi \rangle| \leq 2R_\varphi \cdot \max_{y \in \text{supp}(\varphi)} |\varphi'(y)|$$

woraus leicht die Stetigkeit von  $\mathcal{P}_{\frac{1}{x}}$  folgt.

**Bemerkung:** Die Distribution  $\mathcal{P}_{\frac{1}{x}} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  wird außerhalb der 0 durch die Funktion  $x \mapsto \frac{1}{x}$  erzeugt, das heißt für  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  mit  $0 \notin \text{supp}(\varphi)$  ist

$$\langle \mathcal{P}_{\frac{1}{x}}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x} dx$$

Es stellt sich nun die Frage: Kann jede beliebige  $g \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R} \setminus \{x_0\})$  zu einer Distribution auf  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  fortgesetzt werden, die außerhalb von  $x_0$  durch  $g$  erzeugt wird? Leider ist die Antwort negativ, was an folgendem Gegenbeispiel illustriert sei. Betrachten

$$g \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \quad , \quad g(x) := e^{\frac{1}{x}}$$

und machen die Annahme es existiert eine Distribution  $u_g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  mit

$$\langle u_g, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{1}{x}} dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) : 0 \notin \text{supp}(\varphi)$$

Definieren  $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  so dass

$$\varphi_0(x) := \begin{cases} 0 & : x \notin [1, 2] \\ \geq 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

mit

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi_0(x) dx = 1$$

(vgl. 2.4.1) und

$$\varphi_k(x) := k e^{-\frac{k}{2}} \cdot \varphi_0(kx) \quad , \quad k \in \mathbb{N}$$

Dann geht  $\varphi_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$  in  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  jedoch

$$\langle u_g, \varphi_k \rangle = \int_{1/k}^{2/k} k e^{\frac{1}{x}} e^{-\frac{k}{2}} \varphi_0(kx) dx \stackrel{y:=kx}{=} \int_1^2 e^{k(\frac{1}{y}-\frac{1}{2})} \varphi_0(y) dy \geq \int_1^2 \varphi_0(y) dy = 1$$

ein Widerspruch zur Stetigkeit von  $u_g$ !

## 3.2 Folgen regulärer Distributionen

### 3.2.1 Vorbetrachtung

Folgen regulärer Distributionen auf  $\mathfrak{D}(\Omega)$  sind charakterisiert durch Folgen entsprechender erzeugenden Funktionen in  $L_{1,\text{loc}}(\Omega)$ . Im folgenden seien einige Beispiele illustriert.

1. Definieren zu  $j \in \mathbb{N}$  die Funktionen (Distributionen)

$$u_j \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}) \quad , \quad u_j(x) := \sin(jx)$$

Dann gehen  $u_j \xrightarrow[\text{schwach}^*]{n \rightarrow \infty} 0$  in  $\mathfrak{D}'(\Omega)$  (jedoch nicht punktweise als Funktionen), denn für  $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R})$

$$\langle u_j, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \sin(jx) \varphi(x) \, dx = \int_{-R_\varphi}^{R_\varphi} \sin(jx) \varphi(x) \, dx = \underbrace{-\frac{1}{j} \cos(jx) \varphi(x) \Big|_{-R_\varphi}^{R_\varphi}}_0 + \underbrace{\frac{1}{j} \int_{-R_\varphi}^{R_\varphi} \cos(jx) \varphi'(x) \, dx}_{\text{beschränkt}} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$$

mit  $\text{supp}(\varphi) \subset (-R_\varphi, R_\varphi)$ .

2. Betrachten die Funktionen

$$s_j(x) := \frac{\sin(jx)}{x} \quad , \quad s_j \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R})$$

Dann gehen die Distributionen  $u_{s_j} \xrightarrow[\text{schwach}^*]{n \rightarrow \infty} \pi \delta_0$  in  $\mathfrak{D}'(\mathbb{R})$ .

**Beweis:** Für  $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R})$  mit  $\text{supp}(\varphi) \subset (-R_\varphi, R_\varphi)$  ist

$$\langle u_{s_j}, \varphi \rangle = \int_{-R_\varphi}^{R_\varphi} \frac{\sin(jx)}{x} \varphi(x) \, dx = \int_{-R_\varphi}^{R_\varphi} \frac{\sin(jx)}{x} [\varphi(x) - \varphi(0)] \, dx + \int_{-R_\varphi}^{R_\varphi} \frac{\sin(jx)}{x} \varphi(0) \, dx$$

wobei einerseits

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[ \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} \right] &= \frac{\varphi'(x)x - [\varphi(x) - \varphi(0)]}{x^2} = \frac{\varphi'(x) - \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}}{x} \\ &= \frac{\varphi'(x) - \varphi'(\vartheta(x)x)}{[1 - \vartheta(x)]x} [1 - \vartheta(x)] = \underbrace{\varphi''(\tilde{\vartheta}(x)x)}_{\text{beschränkt}} [1 - \vartheta(x)] \quad , \quad \vartheta, \tilde{\vartheta} \text{ geeignet nach MWS} \end{aligned}$$

$$\int_{-R_\varphi}^{R_\varphi} \frac{\sin(jx)}{x} [\varphi(x) - \varphi(0)] \, dx = \underbrace{\frac{1}{j} \int_{-R_\varphi}^{R_\varphi} \cos(jx) \frac{d}{dx} \left[ \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} \right] \, dx}_{\text{beschränkt}} + \underbrace{\frac{1}{j} \cos(jx) \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} \Big|_{-R_\varphi}^{R_\varphi}}_{-\frac{2}{j} \cos(R_\varphi j) \varphi(0) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$$

und andererseits

$$\int_{-R_\varphi}^{R_\varphi} \frac{\sin(jx)}{x} \varphi(0) \, dx \stackrel{y := jx}{=} \int_{-jR_\varphi}^{jR_\varphi} \frac{\sin y}{y} \varphi(0) \, dy \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \varphi(0) \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(y)}{y} \, dy}_{\pi}$$

also

$$\langle u_{s_j}, \varphi \rangle \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \pi \cdot \varphi(0) \quad , \quad \varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R})$$

3. Die Funktionenfolgen  $(f_n), (g_n), (h_n) \subset L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R})$  aus Einführung 2.1.1 erzeugen Distributionen die gegen  $\delta_0$  in  $\mathfrak{D}'(\mathbb{R})$  gehen.

### 3.2.2 Formel von Sochozki

Betrachten die Familien von Funktionen  $(f_\varepsilon)_{\varepsilon>0}, (g_\varepsilon)_{\varepsilon>0} \subset L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R})$  definiert durch

$$f_\varepsilon(x) := \frac{1}{x+i\varepsilon}, \quad g_\varepsilon(x) := \frac{1}{x-i\varepsilon}$$

Dann gehen die Distributionen:

$$u_{f_\varepsilon} \xrightarrow[\text{schwach}^*]{\varepsilon \searrow 0} -i\pi\delta_0 + \mathcal{P}_{\frac{1}{x}}$$

$$u_{g_\varepsilon} \xrightarrow[\text{schwach}^*]{\varepsilon \searrow 0} i\pi\delta_0 + \mathcal{P}_{\frac{1}{x}}$$

in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ .

**Beweis:** Zu  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  mit  $\text{supp}(\varphi) \subset (-R_\varphi, R_\varphi)$  ist:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{-R_\varphi}^{R_\varphi} \frac{\varphi(x)}{x+i\varepsilon} dx &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{-R_\varphi}^{R_\varphi} \frac{x-i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} \varphi(x) dx = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \varphi(0) \int_{-R_\varphi}^{R_\varphi} \frac{x-i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} dx + \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{-R_\varphi}^{R_\varphi} \frac{x-i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} [\varphi(x) - \varphi(0)] dx \\ &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \varphi(0) \left[ \frac{1}{2} \ln(x^2 + \varepsilon^2) - i \arctan \frac{x}{\varepsilon} \right]_{-R_\varphi}^{R_\varphi} + \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{-R_\varphi}^{R_\varphi} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x+i\varepsilon} dx \\ &\stackrel{\text{Lebesgue}}{=} -i\pi \cdot \varphi(0) + \underbrace{\int_{-R_\varphi}^{R_\varphi} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx}_{\langle \mathcal{P}_{\frac{1}{x}}, \varphi \rangle} \end{aligned}$$

Analog erhält man auch die 2. Formel.

□

### 3.2.3 Die Breit-Wigner-Formel

Die Familie von  $L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R})$ -Funktionen

$$f_\varepsilon(x) := \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}, \quad \varepsilon > 0$$

erzeugt Distributionen mit

$$u_{f_\varepsilon} \xrightarrow[\text{schwach}^*]{\varepsilon \searrow 0} \pi\delta_0$$

in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ .

### 3.2.4 Lokalisationsatz für Distributionen

Zu offener Menge  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  sei  $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$  eine beliebige offene Überdeckung von  $\Omega$ , das heißt

$$\Omega = \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i, \quad \mathcal{O}_i : \text{offen}$$

Stimmen die Einschränkungen  $u|_{\mathcal{O}_i}, v|_{\mathcal{O}_i}$  zweier Distributionen  $u, v \in \mathcal{D}'(\Omega)$  auf allen  $\mathcal{O}_i$  überein, das heißt

$$\langle u, \varphi_i \rangle = \langle v, \varphi_i \rangle \quad \forall \varphi_i \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{O}_i)$$

so gilt  $u = v$ .

**Beweis:** Sei  $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$ , dann ist  $\text{supp}(\varphi) \subset \Omega$  kompakt, das heißt für geeignete  $i_1, \dots, i_L \in I$  ist

$$\text{supp}(\varphi) \subset \bigcup_{l=1}^L \mathcal{O}_{i_l}$$

Nach Lemma 2.4.5 (Zerlegung der Einheit) existieren reellwertige Funktionen  $\varphi_{i_l} \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{O}_{i_l})$  mit

$$\sum_{l=1}^L \varphi_{i_l}(x) = 1 \quad , \quad x \in \text{supp}(\varphi)$$

Insbesondere

$$\varphi_{i_l} \cdot \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{O}_{i_l})$$

und somit

$$\langle u, \varphi \rangle = \left\langle u, \varphi \sum_{l=1}^L \varphi_{i_l} \right\rangle = \sum_{l=1}^L \underbrace{\langle u, \varphi \cdot \varphi_{i_l} \rangle}_{\langle v, \varphi \cdot \varphi_{i_l} \rangle} \stackrel{\text{analog}}{=} \langle v, \varphi \rangle$$

□

### 3.2.5 Definition: Träger einer Distribution

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $X(\Omega) := \mathfrak{D}(\Omega)$  oder  $X(\Omega) := \mathcal{C}(\Omega)$  und  $u \in X'(\Omega)$ . Dann der *Träger*  $\text{supp}(u)$  der Distribution das Komplement (bzgl.  $\Omega$ ) der Vereinigung aller offenen<sup>3</sup> Mengen  $\mathcal{O} \subset \Omega$  mit der Eigenschaft, dass  $u|_{\mathcal{O}} = 0$  ist, das heißt  $\langle u, \varphi \rangle = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{O})$ . Kurz:

$$\text{supp}(u) := \Omega \setminus \left[ \bigcup_{\substack{\mathcal{O} \subset \Omega \text{ offen} \\ \varphi|_{\mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{O})} = 0}} \mathcal{O} \right]$$

**Alternative Definition:** Äquivalent zur obigen Definition ist

$$\text{supp}(u) := \bigcap_{\substack{A \text{ abgeschlossen in } \Omega \\ u|_{\mathcal{C}_0^\infty(\Omega \setminus A)} = 0}} A$$

**Bemerkungen:**

- (i)  $\text{supp}(u)$  in abgeschlossen in  $\Omega$ .
- (ii) Es gilt:

$$\text{supp}(u) = \left\{ x \in \Omega \mid \forall \delta > 0 : u|_{\mathcal{C}_0^\infty(B_\delta^o(x) \cap \Omega)} \neq 0 \right\}$$

- (iii) Einige Autoren (e.g. Triebel) verwenden eine etwas modifizierte Definition

$$\text{supp}'(u) := \left\{ x \in \text{cl}(\Omega) \mid \forall \delta > 0 : u|_{\mathcal{C}_0^\infty(B_\delta^o(x) \cap \Omega)} \neq 0 \right\}$$

Für  $\Omega = \mathbb{R}^n$  sind beide Definitionen äquivalent, im allgemeinen jedoch nicht.

- (iv) Für reguläre Distribution  $u_f$  in  $\mathfrak{D}'(\Omega)$  erzeugt durch  $f \in L_{1,\text{loc}}(\Omega)$  ist stets

$$\text{supp}(u_f) \subset \text{supp}(f)$$

- (v) Ist  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, so gilt

$$\text{supp}(u_f) = \text{supp}(f) = \text{cl}_\Omega \{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}$$

<sup>3</sup>Beachte dass Offenheit in  $(\Omega, \mathcal{O}(\Omega))$  äquivalent zur Offenheit in  $\mathbb{R}^n$  ist (vgl. 2.2.4).

(vi) Für Distribution  $u \in X'(\Omega)$  gilt:

$$u = 0 \Leftrightarrow \text{supp}(u) = \emptyset$$

**Beweis:** Richtung "⇒" ist klar. Sei nun zunächst  $u \in \mathfrak{D}'(\Omega)$  mit  $\text{supp}(u) = \emptyset$ , dann existiert  $\forall x \in \Omega$  ein  $\delta_x > 0$  mit

$$u|_{\mathcal{C}_0^\infty(B_{\delta_x}^o(x)) \cap \Omega} = 0$$

Dabei ist

$$\{B_{\delta_x}^o(x) \cap \Omega\}_{x \in \Omega}$$

eine offene Überdeckung von  $\Omega$ , so dass nach Lokalisationssatz 3.2.4 gilt  $u = 0$  auf  $\Omega$ . Ist nun  $u \in \mathcal{C}'(\Omega)$ , so besitzt natürlich auch die Einschränkung  $u|_{\mathfrak{D}(\Omega)}$  leeren Träger, also  $u|_{\mathfrak{D}(\Omega)} = 0$ . Nach Lemma 2.3.8 existiert jedoch zu jedem  $\psi \in \mathcal{C}(\Omega)$  eine Folge  $(\psi_k) \subseteq \mathfrak{D}(\Omega)$  mit  $\psi_k \xrightarrow[\mathcal{C}(\Omega)]{k \rightarrow \infty} \psi$ , woraus auch  $\langle u, \psi \rangle = 0$  folgt.

**Beispiele:**

$$\text{supp}(\delta_{x_0}) = \{x_0\} \quad , \quad \text{supp}(u_{x \mapsto 1}) = \Omega \quad , \quad \text{supp}(\mu \delta_S) \subset S$$

### 3.2.6 Definition: Singuläre Träger

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $X(\Omega) = \mathfrak{D}(\Omega)$  oder  $X(\Omega) = \mathcal{C}(\Omega)$  und  $u \in X'(\Omega)$  eine Distribution. Dann heißt

$$\text{singsupp}(u) := \Omega \setminus \{x_0 \in \Omega : u \text{ ist in einer Umgebung von } x_0 \text{ durch eine } \mathcal{C}^\infty\text{-Funktion erzeugbar}\}$$

$$= \Omega \setminus \left\{ x_0 \in \Omega : \exists \delta > 0, f \in \mathcal{C}^\infty(B_\delta^o(x_0)) : \langle u, \varphi \rangle = \int_{B_\delta^o(x_0)} f(x)\varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(B_\delta^o(x_0)) \right\}$$

singulärer Träger von  $u$ .

**Bemerkungen:**

(i) Per Konstruktion gilt für Distribution  $u \in X'(\Omega)$ :

$$\text{singsupp}(u) \subset \text{supp}(u)$$

(ii) Gilt  $\text{singsupp}(u) = \emptyset$  für eine Distribution  $u \in \mathfrak{D}'(\Omega)$ , so ist  $u$  regulär.

**Beweis:** Sei  $\text{singsupp}(u) = \emptyset$ , dann existiert für jeden Punkt  $x \in \Omega$  eine Kugel  $B_{\delta_x}^o(x)$  und Funktion  $f_x \in \mathcal{C}^\infty(B_{\delta_x}^o(x))$  so dass  $u|_{B_{\delta_x}^o(x)} = u_f$ . An Überschneidungsumgebungen  $\underbrace{B_{\delta_x}^o(x) \cap B_{\delta_y}^o(y)}_{\text{offen}} \neq \emptyset$  müssen

nach 3.1.7 die Funktionen  $f_x$  und  $f_y$  fast-überall übereinstimmen. Da sie stetig sind, müssen sie im gesamten Überlappungsbereich übereinstimmen. Somit ist die Funktion

$$f(x) := f_x(x)$$

wohldefiniert und glatt, insbesondere lokal integrierbar. Da  $u_f$  und  $u$  auf allen Kugeln  $B_{\delta_x}^o(x)$  übereinstimmen, folgt nach Lokalisationssatz 3.2.4 dass  $u = u_f$ .  $\square$

**Beispiele:**

$$\text{singsupp}(u_{x \mapsto 1}) = \emptyset \quad , \quad \text{singsupp}(\delta_{x_0}) = \{x_0\} \quad , \quad \text{singsupp}(\mathcal{P}_{\frac{1}{x}}) = \{0\} \subset \text{supp}(\mathcal{P}_{\frac{1}{x}}) = \mathbb{R}^n$$

## 3.3 Distributionen mit kompaktem Träger

### 3.3.1 Fortsetzungssatz für Distributionen

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $u \in \mathfrak{D}'(\Omega)$  mit kompaktem Träger in  $\Omega$ . Dann kann  $u$  eindeutig zu einem linearen, stetigen Funktional auf  $\mathcal{C}(\omega)$  fortgesetzt werden.

**Beweis:**

**Existenz:** Da  $\text{supp}(u)$  kompakt ist, existiert nach Lemma 2.4.4 eine Funktion  $\eta \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$  mit  $\eta|_{\text{supp}(u)} = 1$ .

Zu  $\psi \in \mathcal{C}(\Omega)$  sei nun definiert

$$\langle \tilde{u}, \psi \rangle := \langle u, \underbrace{\eta\psi}_{\in \mathfrak{D}(\Omega)} \rangle$$

Offensichtlich ist  $\tilde{u} : \mathcal{C}(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$  linear. Für  $\psi_\nu \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} \psi$  in  $\mathcal{C}(\Omega)$  ist

$$\text{supp}(\eta\psi_\nu), \text{supp}(\eta\psi) \subset \text{supp}(\eta) : \text{kompakt}$$

das heißt  $\eta\psi_\nu \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} \eta\psi$  in  $\mathfrak{D}(\Omega)$  (Beweis analog zu Bemerkung (iii) in 2.3.6). Somit

$$\langle \tilde{u}, \psi_\nu \rangle = \langle u, \eta\psi_\nu \rangle \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} \langle u, \eta\psi \rangle = \langle \tilde{u}, \psi \rangle$$

das heißt  $\tilde{u}$  ist stetig.<sup>4</sup>

**Eindeutigkeit:** Sei  $\hat{u}$  eine weitere stetige & lineare Fortsetzung von  $u$  auf  $\mathcal{C}(\Omega)$ , das heißt

$$\langle \tilde{u}, \varphi \rangle = \langle \hat{u}, \varphi \rangle \quad , \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$$

Nach Lemma 2.3.8 existiert eine Folge  $(\psi_k) \subseteq \mathfrak{D}(\Omega)$  mit  $\psi_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\mathcal{C}(\Omega)} \psi$ , also

$$\langle \hat{u}, \psi \rangle \stackrel{\hat{u} \text{ stetig}}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \langle \hat{u}, \underbrace{\psi_k}_{\in \mathfrak{D}(\Omega)} \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle \tilde{u}, \psi_k \rangle \stackrel{\tilde{u} \text{ stetig}}{=} \langle \tilde{u}, \psi \rangle$$

das heißt  $\tilde{u} = \hat{u}$  auf  $\mathcal{C}(\Omega)$ .

□

**Bemerkung:** Per Definition des Trägers, bleibt für die fortgesetzte Distribution der Träger der gleiche.

### 3.3.2 Definition: $L_{p,\text{com}}$

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $1 \leq p < \infty$ . Dann definiert man

$$L_{p,\text{com}}(\Omega) := \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty \wedge \text{supp}(f) \subseteq \Omega \text{ kompakt} \right\}$$

als die Menge aller  $p$ -integrierbaren, komplexwertigen Funktionen mit kompakten Träger in  $\Omega$ .

**Bemerkung:**  $\mathcal{C}_0 \subseteq L_{p,\text{com}} \subseteq L_p \subseteq L_{p,\text{loc}}$ .

### 3.3.3 Satz über Funktionen in $L_{1,\text{com}}(\Omega)$

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f_1 \in L_{1,\text{com}}(\Omega)$ . Dann definiert

$$\langle u_f, \psi \rangle := \int_{\Omega} f(x)\psi(x) dx \quad , \quad \psi \in \mathcal{C}(\Omega)$$

auf  $\mathcal{C}(\Omega)$  ein lineares, stetiges Funktional (Beweis ähnlich zu 3.1.7). Funktionale dieser Art nennt man *reguläre Distributionen* auf  $\mathcal{C}(\Omega)$ .

<sup>4</sup>Beachte: Nach Lemma 4.1.3 ist  $\tilde{u}$  tatsächlich eine Fortsetzung von  $u$ .

**Bemerkung:** Reguläre Distributionen  $u \in \mathcal{C}'(\Omega)$  können problemlos auf  $\mathfrak{D}(\Omega)$  eingeschränkt werden, zumal  $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \subset \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ . Da Folgenkonvergenz in  $\mathfrak{D}(\Omega)$  auch Folgenkonvergenz in  $\mathcal{C}(\Omega)$  impliziert, sind sie auch tatsächlich stetig auf  $\mathfrak{D}(\Omega)$ . Aufgrund der stärkeren Forderungen an die zugrundeliegenden Funktionen regulärer Distributionen in  $\mathcal{C}'(\Omega)$  sind diese auch regulär in  $\mathfrak{D}'(\Omega)$ .

### 3.3.4 Lemma: Träger von Distributionen in $\mathcal{C}'(\Omega)$

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen. Dann hat jede Distribution  $v \in \mathcal{C}'(\Omega)$  einen kompakten Träger.

**Beweis:** Sei  $(\Omega_j)_{j \in \mathbb{N}}$  eine Ausschöpfungsfolge von  $\Omega$  und angenommen dass  $\text{supp}(u) \subseteq \Omega$  nicht kompakt sei. Dann existiert nach Bemerkung 2.2.4 (iii) kein  $k$  mit  $\text{supp}(u) \subseteq \overline{\Omega}_k$ . Das heißt für alle  $J$  gilt

$$\text{supp}(u) \setminus \bigcup_{j=1}^J \overline{\Omega}_j = \text{supp}(u) \setminus \overline{\Omega}_J \neq \emptyset$$

Da die  $(\Omega_j)$  ganz  $\Omega$  überdecken, existiert ferner zu jedem  $j_k$  ein  $j_{k+1}$  mit

$$(\text{supp}(u) \setminus \overline{\Omega}_{j_k}) \cap \Omega_{j_{k+1}} \neq \emptyset$$

Setze  $x_{k+1} \in (\text{supp}(u) \setminus \overline{\Omega}_{j_k}) \cap \Omega_{j_{k+1}}$  und  $\varepsilon_{k+1} > 0$  hinreichend klein dass

$$B_{\varepsilon_{k+1}}^o(x_{k+1}) \subseteq \underbrace{\Omega_{j_{k+1}} \setminus \overline{\Omega}_{j_k}}_{\text{offen}}$$

Mit  $j_0 := 1$  erhält man so eine Folge  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \text{supp}(u)$  und disjunkte Kugeln  $B_{\varepsilon_k}^o(x_k)$  so dass jedes  $\Omega_j$  nur von endlich vielen dieser Kugeln geschnitten wird. Insbesondere existieren  $\psi_j \in \mathcal{C}_0^\infty(B_{\varepsilon_j}^o(x_j))$  mit  $\langle v, \psi_j \rangle = 1$  (Normierung o.B.d.A). Dann ist

$$\psi(x) := \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j(x) \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$$

Beachte dass die  $B_{\varepsilon_j}^o(x_j)$  und somit auch die Träger  $\text{supp}(\psi_j)$  alle disjunkt sind, die Reihe  $\psi(x)$  also an jedem Punkt (in einer Umgebung) aus höchstens einem Summanden besteht. Ferner gehen

$$\sum_{j=1}^n \psi_j \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \psi$$

in  $\mathcal{C}(\Omega)$ . Doch dann ist

$$\langle v, \psi \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\langle v, \sum_{j=1}^n \psi_j \right\rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \underbrace{\langle v, \psi_j \rangle}_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$$

ein Widerspruch zu  $v \in \mathcal{C}'(\Omega)$ .

□

**Folgerung:** Zusammen mit Fortsetzungssatz 3.3.1 folgt die Äquivalenz

$$\mathcal{C}'(\Omega) \cong \{u \in \mathfrak{D}'(\Omega) : \text{supp}(u) \text{ kompakt in } \Omega\}$$

(vgl. Definition in [1]).

### 3.3.5 Definition: Ordnung einer Distribution

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen mit Ausschöpfungsfolge  $(\Omega_j)_{j \in \mathbb{N}}$  und  $u \in \mathfrak{D}'(\Omega)$ . Dann existiert  $\forall j \in \mathbb{N}$  ein  $c_{j,u} > 0$  und (kleinstes)  $l_{j,u} \in \mathbb{N}_0$  mit

$$|\langle u, \varphi \rangle| \leq c_{j,u} \cdot \|\varphi\|_{\overline{\Omega}_j, l_{j,u}} \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega_j)$$

(ohne Beweis). Gilt  $\sup_j l_{j,u} < \infty$ , so heißt  $l := \sup_j l_{j,u}$  *Ordnung* der Distribution  $u$ .

**Beispiele:**

(i) Jede reguläre Distribution  $u_f$  mit  $f \in L_{1,\text{loc}}(\Omega)$  hat Ordnung 0, denn

$$|\langle u_f, \varphi \rangle| = \left| \int_{\bar{\Omega}_j} f(x) \varphi(x) dx \right| \leq \underbrace{\sup_{x \in \bar{\Omega}_j} \|f(x)\| \cdot \text{vol}(\bar{\Omega}_j)}_{c_{j,u_f}} \cdot \|\varphi\|_{\bar{\Omega}_j,0} \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega_j)$$

(ii) Jede Distribution  $v$  mit kompaktem Träger besitzt endliche Ordnung, denn für  $v \in \mathcal{C}'(\Omega)$  existiert ein  $k_v \in \mathbb{N}$  mit

$$|\langle v, \psi \rangle| \leq c \cdot \underbrace{\|\psi\|_{\bar{\Omega}_{k_v, k_v}}}_{\leq \|\psi\|_{\bar{\Omega}_j, k_v} \quad \forall j \geq k_v} \quad \forall \psi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$$

(iii) Es gibt tatsächlich Distributionen der Ordnung  $\infty$ , nämlich:

$$\langle u, \psi \rangle := \sum_{k=0}^{\infty} \varphi^{(k)}(k) \quad , \quad u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$$

Beachte dass die Summe nach Voraussetzung an die Testfunktionen stets endlich ist. Dabei gilt

$$\text{singsupp } u = \text{supp } u = \mathbb{N}_0$$

**Interpretation:** Die Ordnung einer Distribution ist in einem gewissen Sinne ein Indiz darüber, welche Ableitungsordnungen der Testfunktionen bei deren *Auswertung* eine Rolle spielen.



## 4 Rechnen mit Distributionen

### 4.1 Produkte von Distributionen

#### 4.1.1 Motivation

Zu offener  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  weiß man, dass jede lokal-integrierbare Funktion  $f \in L_{1,\text{loc}}(\Omega)$  gemäß

$$\langle u_f, \varphi \rangle := \int_{\Omega} f(x)\varphi(x) dx \quad , \quad \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$$

eine Distribution  $u_f \in \mathfrak{D}'(\Omega)$  definiert. Zu  $\eta \in C^\infty(\Omega)$  ist dann auch  $\eta f \in L_{1,\text{loc}}$ , wobei

$$\langle u_{\eta f}, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f(x) \cdot \eta(x)\varphi(x) dx = \langle u_f, \underbrace{\eta\varphi}_{\in C_0^\infty(\Omega)} \rangle \quad , \quad \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$$

das heißt  $u_{\eta f} : \varphi \mapsto \langle u_f, \eta\varphi \rangle$ . Analoge Überlegungen gelten auch für  $\mathcal{C}'(\Omega)$  mit  $f \in L_{1,\text{com}}(\Omega)$ . Dies gibt Anlaß zu folgender Definition.

#### 4.1.2 Definition: Produkt von Distributionen mit $C^\infty$ -Funktionen

Zu Distribution  $u \in \mathfrak{D}'(\Omega)$  (bzw.  $u \in \mathcal{C}'(\Omega)$ ) und Funktion  $\eta \in C^\infty(\Omega)$  definieren die Distribution

$$\langle \eta u, \varphi \rangle := \langle u, \eta\varphi \rangle \quad , \quad \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega) \quad (\text{bzw. } \varphi \in \mathcal{C}(\Omega))$$

#### Bemerkungen:

- (i) Die so definierte Abbildung  $\eta u$  ist tatsächlich eine Distribution in  $\mathfrak{D}'(\Omega)$  (bzw.  $\mathcal{C}'(\Omega)$ ).

**Beweis:** Linearität ist klar. Für konvergente Folge  $\varphi_\nu \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} \varphi$  in  $\mathcal{C}(\Omega)$  geht ohnehin auch  $\eta\varphi_\nu \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} \eta\varphi$

(vgl. Bemerkung (iii) in 2.3.6). Für  $\varphi_\nu \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} \varphi$  geht ohnehin  $\varphi_\nu \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} \varphi$  das heißt  $\eta\varphi_\nu \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} \eta\varphi$ , und da

zusätzlich  $\text{supp}(\eta\varphi_\nu) \subset \text{supp}(\varphi_\nu)$  gilt, ist sogar  $\eta\varphi_\nu \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} \eta\varphi$ . Demnach

$$\langle \eta u, \varphi_\nu \rangle = \langle u, \eta\varphi_\nu \rangle \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} \langle u, \eta\varphi \rangle$$

- (ii) Ist  $u_f$  regulär, erzeugt durch  $f \in L_{1,\text{loc}}(\Omega)$  (bzw.  $f \in L_{1,\text{com}}(\Omega)$ ), so ist  $\eta \cdot u_f = f \cdot u_\eta = u_{\eta f}$ .

- (iii) Für  $\eta \in C^\infty(\Omega)$ ,  $\eta(x) \neq 0 \quad \forall x \in \Omega$  und Distributionen  $u, v$  gilt:  $\eta \cdot u = v \Leftrightarrow u = \frac{1}{\eta} \cdot v$ .

- (iv) Offensichtlich ist die Multiplikation mit  $C^\infty$ -Funktionen distributiv und assoziativ.

#### 4.1.3 Satz über den Träger von Distributionenprodukten

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $X := \mathfrak{D}(\Omega)$  bzw.  $X := \mathcal{C}(\Omega)$  bzw.  $X := S(\mathbb{R}^n)$ . Sei ferner  $\eta \in C^\infty(\Omega)$  und  $u \in X'(\Omega)$  eine Distribution. Dann:

1. Es gilt stets

$$\text{supp}(\eta u) \subset \text{supp}(\eta) \cap \text{supp}(u)$$

Beachte dass die Aussage für reguläre, stetige Distributionen trivial ist.

2. Ist  $\eta|_{\text{supp}(u)} = 1$ , so ist  $\eta \cdot u = u$ .

3. Ist  $\text{supp}(\varphi) \cap \text{supp}(u) = \emptyset$  für Testfunktion  $\varphi \in X(\Omega)$ , so ist  $\langle u, \varphi \rangle = 0$ .

**Beweis:**

1. Zu einem ist

$$\begin{aligned} x \in \text{supp}(\eta u) &\Leftrightarrow \forall \delta > 0 : \exists \varphi \in X(B_\delta^o(x)) : \langle \eta u, \varphi \rangle \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \forall \delta > 0 : \exists \varphi \in X(B_\delta^o(x)) : \langle u, \eta \varphi \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall \delta > 0 : \exists \tilde{\varphi} = \eta \varphi \in X(B_\delta^o(x)) : \langle u, \tilde{\varphi} \rangle \neq 0 \Rightarrow x \in \text{supp}(u) \end{aligned}$$

das heißt  $\text{supp}(\eta u) \subset \text{supp}(u)$ . Zum anderen ist

$$\begin{aligned} x \notin \text{supp}(\eta) &\Leftrightarrow \exists \delta > 0 : \eta|_{B_\delta^o(x)} = 0 \\ &\Rightarrow \exists B_\delta^o(x) : \forall \varphi \in X(B_\delta^o(x)) : \eta \varphi = 0 \\ &\Rightarrow \exists B_\delta^o(x) : \forall \varphi \in X(B_\delta^o(x)) : \underbrace{\langle u, \eta \varphi \rangle}_{\eta u, \varphi} = 0 \Rightarrow x \notin \text{supp}(\eta u) \end{aligned}$$

das heißt  $\text{supp}(\eta u) \subset \text{supp}(\eta)$ .

2. Zu  $\varphi \in X(\Omega)$  ist  $\text{supp}((1 - \eta)u) \subset \text{supp}(1 - \eta) \cap \text{supp}(u) = \emptyset$  und somit

$$\langle u, \varphi \rangle = \langle u, \eta \varphi + (1 - \eta)\varphi \rangle = \langle \eta u, \varphi \rangle + \underbrace{\langle (1 - \eta)u, \varphi \rangle}_0 = \langle \eta u, \varphi \rangle$$

3. Ist  $u \in \mathcal{C}'(\Omega)$  und  $\varphi \in \mathcal{C}(\Omega)$  so folgt direkt

$$\langle u, \varphi \rangle = \underbrace{\langle \varphi \cdot u, 1 \rangle}_0 = 0$$

Ist andererseits  $u \in \mathfrak{D}'(\Omega)$  und  $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$ , dann besitzt  $\varphi$  kompakten Träger, und es existiert ein  $\eta \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$  mit  $\eta|_{\text{supp}(\varphi)} = 1$ , also  $\eta \varphi = \varphi$  bzw.

$$\langle u, \varphi \rangle = \langle u, \eta \varphi \rangle = \underbrace{\langle \varphi u, \eta \rangle}_0 = 0$$

Nach Lemma 2.3.8(3) (siehe Beweis) folgt die Behauptung auch für  $u \in S'(\mathbb{R}^n)$ ,  $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ .

□

#### 4.1.4 Korollar über die lokale Wirkung von Distributionen

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $X = \mathfrak{D}(\Omega)$  oder  $X = \mathcal{C}(\Omega)$  und  $\varphi \in X$  eine Testfunktion. Dann hängt  $\langle u, \varphi \rangle$  nur vom Verhalten von  $\varphi$  in einer (beliebig kleinen) Umgebung von  $\text{supp}(u)$  ab. Mit anderen Worten, sind  $\varphi, \psi \in X$  mit  $\varphi|_U = \psi|_U$  für irgendeine offene  $U \supset \text{supp}(u)$ , so gilt  $\langle u, \varphi \rangle = \langle u, \psi \rangle$ .

**Beweis:** Seien  $\varphi|_U = \psi|_U$  für irgendeine offene  $U \supset \text{supp}(u)$ , dann ist  $\text{supp}(\varphi - \psi) \cap \text{supp}(u) = \emptyset$ . Nach Satz 4.1.3 folgt dann  $\langle u, \varphi - \psi \rangle = 0$ .

□

### 4.1.5 Beispiele von Distributionenprodukten

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen.

1. Zu  $x_0 \in \Omega$  und  $\eta \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$  ist

$$\langle \eta \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \langle \delta_{x_0}, \eta \varphi \rangle = \eta(x_0) \underbrace{\langle \varphi(x_0), \varphi \rangle}_{\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle} = \langle \eta(x_0) \delta_{x_0}, \varphi \rangle \quad , \quad \varphi \in \mathcal{D}'(\Omega)$$

das heißt

$$\eta \cdot \delta_{x_0} = \eta(x_0) \cdot \delta_{x_0}$$

2. Betrachten  $\mathcal{P}_{\frac{1}{x}} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ . Dann ist

$$\langle x \mathcal{P}_{\frac{1}{x}}, \varphi \rangle = \langle \mathcal{P}_{\frac{1}{x}}, x \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\|x\| \geq \varepsilon} \frac{x \varphi(x)}{x} dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx = \langle u_1, \varphi \rangle$$

### 4.1.6 Bemerkung zu allgemeineren Distributionenprodukten

Angesichts der obigen Produkt-Definition zwischen  $\mathcal{C}^\infty$ -Funktionen und Distributionen, stellt sich die Frage ob diese sich auch auf beliebige Distributionen verallgemeinern lässt. Genauer formuliert: Existiert eine assoziative, kommutative Verknüpfung  $\otimes : \mathcal{D}'(\Omega) \times \mathcal{D}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$  (bzw. für  $\mathcal{C}'(\Omega)$ ) die den obigen Begriff verallgemeinert (d.h.  $\eta \cdot u = u_\eta \otimes u$  für  $\eta \in \mathcal{C}^\infty$ )?

Leider ist die Antwort darauf **nein**, denn sonst wäre:

$$0 = 0 \cdot \mathcal{P}_{\frac{1}{x}} = 0 \otimes \mathcal{P}_{\frac{1}{x}} = (x \delta_0) \otimes \mathcal{P}_{\frac{1}{x}} = \left( x \mathcal{P}_{\frac{1}{x}} \right) \otimes \delta_0 = \underbrace{u_1 \otimes \delta_0}_{1 \cdot \delta_0} = \delta_0$$

ein Widerspruch!

## 4.2 Differentiation von Distributionen

### 4.2.1 Vorbetrachtung

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ , dazu die erzeugte Distribution  $u_f$  in  $\mathcal{D}'(\Omega)$ . Wegen  $\frac{\partial f}{\partial x^j} \in \mathcal{C}(\Omega)$  ist auch  $u_{\partial_j f} \in \mathcal{D}'(\Omega)$ , und es gilt

$$\langle u_{\partial_j f}, \varphi \rangle = \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x^j}(x) \varphi(x) dx \stackrel{\text{Gauß}}{=} \underbrace{\int_{\partial\Omega} f(y) \varphi(y) \cdot (n_y \cdot e_j) dy}_0 - \int_{\Omega} f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x^j}(x) dx = - \langle u_f, \partial_j \varphi \rangle \quad , \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

da  $\text{supp}(\varphi) \subset \Omega$

( $n_y$  äußere Einheitsnormale an  $y \in \partial\Omega$ ). Analoge Überlegungen gelten auch im Fall  $f \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)$ ,  $\varphi \in \mathcal{C}(\Omega)$ . Dies gibt Anlass zu folgender Definition.

### 4.2.2 Definition: Ableitung von Distributionen

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $X := \mathcal{C}(\Omega)$  bzw.  $X := \mathcal{D}(\Omega)$  bzw.  $X := \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Dann definiert man zu beliebigem  $u \in X'$  und Multiindex  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$  die *verallgemeinerte Ableitung (Distributionsableitung)* von  $u$  gemäß

$$\langle D^\alpha u, \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle u, D^\alpha \varphi \rangle \quad , \quad \varphi \in X$$

**Bemerkung:** Ist  $\varphi \in X$ , so ist auch  $(-1)^{|\alpha|} D^\alpha \varphi \in X$ . Die lineare Abbildung  $D^\alpha u$  ist somit wohldefiniert. Tatsächlich handelt es sich bei  $D^\alpha u$  sogar um eine Distribution in  $X'$ , denn aus  $\varphi_\nu \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} \varphi$  folgt  $D^\alpha \varphi_\nu \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} D^\alpha \varphi$ , das heißt

$$\langle D^\alpha u, \varphi_\nu \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, D^\alpha \varphi_\nu \rangle \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} (-1)^{|\alpha|} \langle u, D^\alpha \varphi \rangle = \langle D^\alpha u, \varphi \rangle$$

### 4.2.3 Eigenschaften der Distributionsableitung

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $X(\Omega) := \mathfrak{D}(\Omega)$  bzw.  $X(\Omega) := \mathcal{C}'(\Omega)$ . Dann gilt:

1. Jede Distribution ist beliebig oft differenzierbar.

2.  $D^\alpha : X'(\Omega) \rightarrow X'(\Omega)$  ist linear und erfüllt

$$D^\alpha D^\beta u = D^{\alpha+\beta} u, \quad u \in X'(\Omega), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$$

3. Zu  $f \in \mathcal{C}^k(\Omega)$  (bzw.  $f \in \mathcal{C}_0^k(\Omega)$ ) und Multiindex  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ ,  $|\alpha| \leq k$  ist

$$u_{D^\alpha f} = D^\alpha u$$

in  $\mathfrak{D}'(\Omega)$  (bzw.  $\mathcal{C}'(\Omega)$ ).

4. Leibnitz-Regel: Zu  $\eta \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ , Distribution  $u \in X'(\Omega)$  und Multiindex  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$  gilt:

$$D^\alpha(\eta u) = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \frac{\alpha!}{\beta!\gamma!} (D^\beta \eta)(D^\gamma u)$$

5. Lokalität der Differentiation: Zu Distribution  $u \in X'(\Omega)$  und Multiindex  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$  ist

$$\text{supp}(D^\alpha u) \subset \text{supp}(u)$$

6. Eine auf jeder kompakten Menge gleichmäßig konvergente Reihe lokal integrierbarer Funktionen

$$\sum_{l=1}^{\infty} f_l =: F, \quad f_l \in L_{1,\text{loc}}(\Omega)$$

erzeugt eine in  $\mathfrak{D}'(\Omega)$  beliebig oft differenzierbare und konvergente Reihe von Distributionen:

$$D^\alpha \sum_{l=1}^L u_{f_l} \xrightarrow[\text{schwach}^*]{L \rightarrow \infty} D^\alpha u_F, \quad \alpha \in \mathbb{N}_0^n$$

Formal also:

$$\sum_{l=1}^{\infty} D^\alpha u_{f_l} = D^\alpha \sum_{l=1}^{\infty} u_{f_l}$$

#### Beweis:

1. Klar, da Testfunktionen aus  $\mathcal{C}^\infty$ .

2. Gilt, da entsprechende Regel für Testfunktionen gilt.

3. Siehe Vorbetrachtung 4.2.1 und verwende Teil (2).

4. Beweis durch vollständige Induktion über  $|\alpha|$ , und Verwendung von

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial x^j}(\eta u), \varphi \right\rangle &= - \left\langle u, \eta \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \right\rangle = - \left\langle u, \frac{\partial}{\partial x^j}(\eta \varphi) - \frac{\partial \eta}{\partial x^j} \varphi \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial u}{\partial x^j}, \eta \varphi \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \eta}{\partial x^j} u, \varphi \right\rangle = \left\langle \eta \frac{\partial u}{\partial x^j} + \frac{\partial \eta}{\partial x^j} u, \varphi \right\rangle \end{aligned}$$

5. Es gilt:

$$\begin{aligned} x \notin \text{supp}(u) &\Rightarrow \exists B_\delta^o(x) : \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(B_\delta^o(x)) : \langle u, \varphi \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \exists B_\delta^o(x) : \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(B_\delta^o(x)) : \langle D^\alpha u, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, \underbrace{D^\alpha \varphi}_{\in \mathcal{C}_0^\infty(B_\delta^o(x))} \rangle = 0 \\ &\Rightarrow x \notin \text{supp}(D^\alpha u) \end{aligned}$$

6. Setzen

$$F_L := \sum_{l=1}^L f_l$$

Dann:

$$\begin{aligned} |\langle D^\alpha(u_{F_L} - u_F), \varphi \rangle| &= \langle u_{F_L} - u_F, D^\alpha \varphi \rangle \stackrel{K := \text{supp}(\varphi)}{=} \left| \int_K (F_L(x) - F(x)) \cdot D^\alpha \varphi(x) dx \right| \\ &\leq \int_K |(F_L(x) - F(x)) D^\alpha \varphi(x)| dx \leq \underbrace{\sup_{x \in K} |F_L(x) - F(x)|}_{\xrightarrow{L \rightarrow \infty} 0} \cdot \sup_{x \in K} |D^\alpha \varphi(x)| \cdot \text{Vol}(K) \xrightarrow{L \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

#### 4.2.4 Differentiationsbeispiele

(i) Zu endlicher Familie  $(x_i)_{i \in I} \subset \mathbb{R}$  sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  in  $\mathbb{R} \setminus \{x_i\}_{i \in I}$  differenzierbar, lokal integrierbar, dazu die erzeugte Distribution  $u_f \in \mathfrak{D}(\mathbb{R})$ . Existieren die Grenzwerte

$$f(x_i + 0) := \lim_{\varepsilon \searrow 0} f(x_i + \varepsilon) \quad , \quad f(x_i - 0) := \lim_{\varepsilon \nearrow 0} f(x_i + \varepsilon) \quad , \quad i \in I$$

so gilt:

$$\frac{du_f}{dx} = u_{f'} + \sum_{i \in I} [f]_{x_i} \cdot \delta_{x_i} \quad , \quad [f]_{x_i} := f(x_i + 0) - f(x_i - 0)$$

**Beweis:** O.b.d.A sei  $I = \{0\}$ . Zu  $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$  ist

$$\begin{aligned} \langle u'_f, \varphi \rangle &= - \langle u_f, \varphi' \rangle = - \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi'(x) dx = - \int_{-\infty}^{x_0} f(x) \varphi'(x) dx - \int_{x_0}^{\infty} f(x) \varphi'(x) dx \\ &= \underbrace{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \varphi(x)}_0 \text{ da } \text{supp}(\varphi) \text{ kompakt} - \lim_{x \nearrow x_0} f(x) \varphi(x) + \int_{-\infty}^{x_0} f'(x) \varphi(x) dx - \underbrace{\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \varphi(x)}_0 \text{ da } \text{supp}(\varphi) \text{ kompakt} + \lim_{x \searrow x_0} f(x) \varphi(x) + \int_{x_0}^{\infty} f'(x) \varphi(x) dx \\ &= [f]_{x_0} \varphi(x_0) + \underbrace{\int_{\mathbb{R}} f'(x) \varphi(x) dx}_{\langle u_{f'}, \varphi \rangle} = \langle u_{f'} + [f]_{x_0} \delta_{x_0}, \varphi \rangle \end{aligned}$$

**Bemerkung:** Analoge Aussage gilt auch für den Fall  $u_f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$  falls  $\text{supp}(f)$  kompakt ist, der Beweis ist fast identisch.

(ii) **Spezialfall:** Die Heavisidesche Sprungfunktion

$$\Theta(x) := \begin{cases} 1 & : x \geq 0 \\ 0 & : x < 0 \end{cases} \quad (4.2.4.1)$$

( $x_0 = 0$ ,  $[\Theta]_0 = 1$ ) erzeugt eine reguläre Distribution in  $\mathfrak{D}'(\Omega)$ , mit

$$u'_{\Theta} = \delta_0$$

(iii) Ladungsdichte für einen im Ursprung liegenden Dipol mit elektrischem Moment 1, der Dichte:

$$\rho_\varepsilon := \frac{1}{\varepsilon} \delta_\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon} \delta_0$$

Machen nun den Übergang zu einem Punktdipol, das heißt betrachten  $\lim_{\varepsilon \searrow 0} \rho_\varepsilon$  (in  $\mathcal{C}'(\mathbb{R})$ ):

$$\langle \rho_\varepsilon, \varphi \rangle = \frac{1}{\varepsilon} (\varphi(\varepsilon) - \varphi(0)) \xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} \varphi'(0) = \langle \delta_0, \varphi' \rangle = - \langle \delta'_0, \varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$$

Der Punktdipol wird also beschrieben durch die Distribution (*Verteilung*)  $-\delta'_0$ . Ferner ist

$$\langle -\delta'_0, 1 \rangle = \langle \delta_0, 1' \rangle = \langle \delta_0, 0 \rangle = 0 \quad (\text{Gesamtladung})$$

$$\langle -\delta'_0, x \rangle = \langle \delta_0, x' \rangle = \langle \delta_0, 1 \rangle = 1 \quad (\text{Dipolmoment})$$

- (iv) Ladungsdichte für eine Punktdipolverteilung (stückweise stetige Dipoldichte  $\nu$ , *Orientierung* entlang Flächennormale  $\mathbf{n}$ ) auf einer glatten Fläche  $S \subset \mathbb{R}^n$ : Analog zum Punktdipol gegeben durch

$$\left\langle -\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(\nu \delta_S), \varphi \right\rangle := \left\langle \nu \delta_S, \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \right\rangle = \int_S \nu(x) \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}}(x) ds$$

Dabei ist tatsächlich  $-\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(\nu \delta_S) \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^n)$ .

- (v) Die Reihe

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikx}$$

erzeugt die Distributionsreihe

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{2k\pi}$$

in  $\mathfrak{D}'(\Omega)$  (vgl. Satz 4.2.3 (6)), den sogenannten *Dirac-Kamm*.

**Beweis:** Setzen die Funktion

$$f(x) := \frac{1}{2} - \frac{x}{2\pi}, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$$

periodisch auf  $\mathbb{R}$  fort, dann gilt analog zu (i):

$$u'_f = u_{f'} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{[f]_{2k\pi}}_1 \delta_{2k\pi} = -u_{\frac{1}{2\pi}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{2k\pi}$$

Entwickeln nun  $f_0$  in die Fourierreihe

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ikx}}_{\substack{\text{gleichmäßig} \\ \text{konvergent}}}, \quad C_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx = \begin{cases} 0 & : k = 0 \\ \frac{-i}{2k\pi} & : k \neq 0 \end{cases}$$

Dann ist mit

$$f'(x) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2\pi} e^{ikx}}_{f'_k}, \quad f_k := \begin{cases} \frac{-ie^{ikx}}{2\pi k} & : k \neq 0 \\ \frac{x}{2\pi} & : k = 0 \end{cases}$$

entsprechend:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{u_{f'_k}}_{u'_{f_k}} = \underbrace{u_{f_0}}_{u_{\frac{1}{2\pi}}} + \underbrace{\sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} u'_{f_k}}_{\frac{d}{dx} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} u_{f_k}} = u_{\frac{1}{2\pi}} + u'_f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{2k\pi}$$

nach 4.2.3 (6)

(vi) Sei  $G \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet<sup>5</sup> mit glattem Rand  $\partial G$ , dazu  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit:

- $f|_G \in \mathcal{C}^1(G)$  ist stetig auf  $\overline{G}$  fortsetzbar,
- $f|_{G^c} \in \mathcal{C}^1(G^c)$  ist stetig auf  $\overline{G^c}$  fortsetzbar.

Sei definiert

$$[f]_{\partial G}(x) := \lim_{\substack{z \in G^c \\ z \rightarrow x}} f(z) - \lim_{\substack{y \in G \\ y \rightarrow x}} f(y) \quad , \quad x \in \partial G$$

Dann gilt:

$$\frac{\partial u_f}{\partial x^j} = u_{\partial_j f} + [f]_{\partial G} \cdot (n_x \cdot e_j) \cdot \delta_{\partial G}$$

mit der äußeren Einheitsnormalen  $n_x$  an der Stelle  $x \in \partial G$ .

**Beweis:** Analog zu (i) mit Satz von Gauß und

$$\langle \mu \delta_{\partial G}, \varphi \rangle := \int_{\partial G} \mu(x) \varphi(x) \, ds$$

### 4.2.5 Der Laplace-Integralkern

Betrachten den so genannten *Integralkern* des Laplace-Operators:

$$\mathcal{E}_n(x) := \begin{cases} (2\pi)^{-1} \ln \|x\| & : n = 2 \\ -\frac{1}{(n-2) \text{Vol}(\partial B_1^n)} \cdot \frac{1}{\|x\|^{n-2}} & : n \geq 3 \end{cases}$$

Beachte dass  $\mathcal{E}_n \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$  ist, denn

$$\int_{\|x\| \leq \varepsilon} \mathcal{E}_n(x) \, dx \sim \int_{\|x\| \leq \varepsilon} \frac{dx}{\|x\|^{n-2}} \stackrel{\text{Kugelkoordinaten}}{\sim} \int_{\partial B_1^n} \int_0^1 \frac{r^{n-1}}{r^{n-2}} \, dr \, ds$$

so dass  $\mathcal{E}_n$  eine Distribution  $u_{\mathcal{E}_n} \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^n)$  erzeugt.

**Behauptung:**

$$\boxed{\Delta u_{\mathcal{E}_n} = \delta_0} \tag{4.2.5.1}$$

**Beweis:** Betrachten o.B.d.A den Fall  $n \geq 3$ . Bekanntlich ist  $\Delta \mathcal{E}_n(x) = 0$  für  $x \neq 0$ . Definitionsgemäß ist für  $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$ :

$$\begin{aligned} \langle \Delta u_{\mathcal{E}_n}, \varphi \rangle &\stackrel{\text{def.}}{=} \langle u_{\mathcal{E}_n}, \Delta \varphi \rangle = - \underbrace{\frac{1}{(n-2) \text{Vol}(\partial B_1^n)}}_{\varkappa} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\|x\|^{n-2}} \Delta \varphi(x) \, dx = - \varkappa \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left[ \int_{\|x\| \geq \varepsilon} \frac{1}{\|x\|^{n-2}} \Delta \varphi(x) \, dx \right] \\ &\stackrel{\text{Green}}{=} \varkappa \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left\{ - \int_{\|x\| \geq \varepsilon} \underbrace{\Delta \left[ \frac{1}{\|x\|^{n-2}} \right]}_0 \varphi(x) \, dx + \int_{\|x\| = \varepsilon} \frac{1}{\|x\|^{n-2}} \frac{\partial \varphi}{\partial \|x\|}(x) - \varphi(x) \frac{\partial}{\partial \|x\|} \left[ \frac{1}{\|x\|^{n-2}} \right] ds \right\} \end{aligned}$$

wobei die Greensche Formel

$$\int_G (g \Delta f - f \Delta g) \, dx = \int_{\partial G} \left( g \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} - f \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} \right) \, ds$$

<sup>5</sup>Ein *Gebiet* ist eine offene, nichtleere, zusammenhängende Teilmenge eines topologischen Raumes.

für beschränktes Gebiet  $G \subset \mathbb{R}^n$  und  $2 \times$  partiell differenzierbare  $f, g : G \rightarrow \mathbb{R}$  verwendet wurde (beachte dass  $\varphi$  beschränkten Träger besitzt). Wegen

$$\left| \int_{\|x\|=\varepsilon} \frac{1}{\|x\|^{n-2}} \frac{\partial \varphi}{\partial \|x\|}(x) ds \right| = \frac{1}{\varepsilon^{n-2}} \left| \int_{\|x\|=\varepsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial \|x\|}(x) ds \right| \leq \frac{\text{Vol}(\partial B_1^n) \varepsilon^{n-1}}{\varepsilon^{n-2}} \cdot \sup_{\|x\|=\varepsilon} \underbrace{\left| \frac{\partial \varphi}{\partial \|x\|}(x) \right|}_{< \infty} \xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} 0$$

ist

$$\langle \Delta u_{\varepsilon_n}, \varphi \rangle = -\varkappa \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\|x\|=\varepsilon} \varphi(x) \frac{\partial}{\partial \|x\|} \left[ \frac{1}{\|x\|^{n-2}} \right] ds = \varkappa(n-2) \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{\varepsilon^{n-1}} \int_{\|x\|=\varepsilon} \varphi(x) ds$$

Wegen

$$\frac{\overbrace{|\varphi(x) - \varphi(0)|}^{\psi(x)}}{\|x\|} \in \mathcal{O}(\|x\|)$$

kann man für  $\varepsilon_0 > 0$  klein genug und Konstante  $M > 0$  abschätzen

$$\frac{|\psi(x)|}{\|x\|} \leq M \quad \forall 0 < \|x\| \leq \varepsilon_0$$

(alternativ folgt die Behauptung aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung). Insbesondere:

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \left| \frac{1}{\varepsilon^{n-1}} \int_{\|x\|=\varepsilon} \psi(x) ds \right| \leq \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{M}{\varepsilon^{n-1}} \underbrace{\int_{\|x\|=\varepsilon} \|x\| ds}_{\varepsilon \cdot \text{Vol}(\partial B_1^n) \varepsilon^{n-1}} = 0$$

Eingesetzt ergibt

$$\begin{aligned} \langle \Delta u_{\varepsilon_n}, \varphi \rangle &= \varkappa(n-2) \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{\varepsilon^{n-1}} \left[ \int_{\|x\|=\varepsilon} \varphi(0) ds + \int_{\|x\|=\varepsilon} \psi(x) ds \right] \\ &= \varkappa(n-2) \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{\varepsilon^{n-1}} \underbrace{\int_{\|x\|=\varepsilon} \varphi(0) ds}_{\text{Vol}(\partial B_1^n) \varepsilon^{n-1} \varphi(0)} = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle \end{aligned}$$

□

#### 4.2.6 Integrkern der Wellengleichung

Betrachten den Integrkern (*Fundamentallösung*)

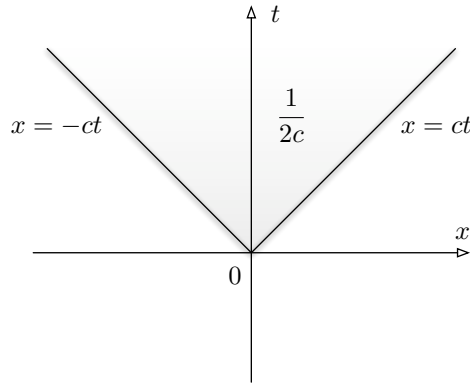
$$\mathcal{W}(x, t) := \frac{1}{2c} \Theta(ct - |x|)$$

der 1-dimensionalen Wellengleichung

$$\underbrace{\left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right]}_{\square} U = f$$

Offensichtlich ist  $\mathcal{W}$  lokal-integrierbar.





**Abbildung 3:** Zur Definition des Integralkerns der Wellengleichung.

Als Funktion ist  $\mathcal{W}$  nicht differenzierbar, als Distribution in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  jedoch schon. Dabei gilt:

$$\boxed{\square u_{\mathcal{W}} = \delta_0} \quad (4.2.6.1)$$

**Beweis:** Für Testfunktion  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  ist

$$\begin{aligned} \langle \square \mathcal{W}, \varphi \rangle &\stackrel{\text{def.}}{=} \langle \mathcal{W}, \square \varphi \rangle = \frac{1}{2c} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\frac{|x|}{c}}^{\infty} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(x, t) dt dx - c \int_0^{\infty} \int_{-ct}^{ct} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x, t) dx dt \\ &= \frac{1}{2c} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, \infty)}_0 - \frac{\partial \varphi}{\partial t}\left(x, \frac{|x|}{c}\right) \right] - \frac{c}{2} \int_0^{\infty} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x}(ct, t) - \frac{\partial \varphi}{\partial x}(-ct, t) \right] dt \\ &= \frac{1}{2c} \int_0^{\infty} -\frac{\partial \varphi}{\partial t}\left(x, \frac{x}{c}\right) dx - \frac{1}{2c} \int_{-\infty}^0 \frac{\partial \varphi}{\partial t}\left(x, -\frac{x}{c}\right) dx - \frac{c}{2} \int_0^{\infty} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x}(ct, t) - \frac{\partial \varphi}{\partial x}(-ct, t) \right] dt \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(cy, y) dy - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(-cy, y) dy - \frac{c}{2} \int_0^{\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(cy, y) dy + \frac{c}{2} \int_0^{\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(-cy, y) dy \\ &\quad \quad \quad y:=\frac{x}{c} \quad \quad \quad y:=-\frac{x}{c} \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{d}{dy} \varphi(cy, y) dy - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{d}{dy} \varphi(-cy, y) dy \\ &= -\frac{1}{2} \left[ \underbrace{\varphi(c \cdot \infty, \infty)}_0 - \varphi(c \cdot 0, 0) + \underbrace{\varphi(-c \cdot \infty, \infty)}_0 - \varphi(-c \cdot 0, 0) \right] = \varphi(0, 0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle \end{aligned}$$

**Interpretation:** Die Fundamentallösung  $\mathcal{W}$  (bzw.  $u_{\mathcal{W}}$ ) kann als *verallgemeinerte* Lösung der Wellengleichung mit *Quelle*  $\delta_0$  interpretiert werden. Sie stellt gewissermaßen die *Welle* dar, die durch einen pulsartigen *Anstoß* im Ursprung  $x = 0$  zur Zeit  $t = 0$  erzeugt wird. Zu erkennen ist die niemals verschwindende Singularität der Lösung entlang der *Wellenfront*  $|x| = ct$ :

$$\text{singsupp}(\mathcal{W}) = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : ct = |x|\}$$

Im Gegensatz dazu, führt eine ähnliche Punktquelle  $\delta_0$  bei der Laplace-Gleichung  $\Delta \mathcal{E}_n = \delta_0$  zu einer *glätteren* Lösung, im Sinne dass

$$\text{singsupp}(\mathcal{E}_n) = \{0\}$$

Die Quellen-Singularität wird sozusagen im Raum *breitgeschmiert*. Dies ist tatsächlich ein fundamentaler Unterschied zwischen parabolischen (e.g. Laplace-Gleichung) und hyperbolischen (e.g. Wellengleichung) Differentialgleichungen!

### 4.3 Koordinatentransformationen von Distributionen

#### 4.3.1 Vorbetrachtung

Sei  $f \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$  eine die Distribution  $u_f \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^n)$  erzeugende, lokal integrierbare Funktion. Betrachten sei die affine Abbildung

$$T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad Tx := Ax + b, \quad A \in \text{GL}(n, \mathbb{R}), \quad b \in \mathbb{R}^n$$

dazu die Transformation

$$f \mapsto f \circ T$$

Diese induziert entsprechend eine Transformation der Distribution:

$$\langle u_{fT}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(Tx) \varphi(x) dx = \frac{1}{|\det(A)|} \int_{T(\mathbb{R}^n)} f(y) \varphi(T^{-1}y) dy \stackrel{T(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n}{=} \left\langle u_f, \frac{\varphi \circ T^{-1}}{|\det(A)|} \right\rangle, \quad \varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$$

Allgemeiner seien  $\tilde{\Omega}, \Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $f \in L_{1,\text{loc}}(\Omega)$  und  $\tau : \tilde{\Omega} \rightarrow \Omega$  ein  $\mathcal{C}^\infty$ -Diffeomorphismus<sup>6</sup> und

$$\left| \det \left( \frac{\partial \tau^{-1}}{\partial y} \right) \right| \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$$

Dann ist  $f \circ \tau \in L_{1,\text{loc}}(\tilde{\Omega})$  wieder lokal integrierbar<sup>7</sup> und  $u_{f\tau}$  wird zu eine Distribution in  $\mathfrak{D}'(\tilde{\Omega})$ :

$$\langle u_{f\tau}, \varphi \rangle = \left\langle u_f, \underbrace{\left| \det \left( \frac{\partial \tau^{-1}}{\partial y} \right) \right| \cdot \overbrace{(\varphi \circ \tau^{-1})}^{\in \mathfrak{D}(\Omega)}}_{\in \mathfrak{D}(\Omega)} \right\rangle, \quad \varphi \in \mathfrak{D}(\tilde{\Omega})$$

Ganz analoge Überlegungen gelten auch für  $f \in L_{1,\text{com}}(\Omega)$ . Dies gibt Anlass zu folgender Definition.

#### 4.3.2 Definition: Koordinatentransformation von Distributionen

Seien  $\tilde{\Omega}, \Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $\tau : \tilde{\Omega} \rightarrow \Omega$  ein  $\mathcal{C}^\infty$ -Diffeomorphismus mit

$$\left| \det \left( \frac{\partial \tau^{-1}}{\partial y} \right) \right| \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$$

Sei  $X(\Omega) = \mathfrak{D}(\Omega)$  oder  $X(\Omega) = \mathcal{C}(\Omega)$  und  $u \in X'(\Omega)$  eine Distribution. Dann definiert man:

$$\langle u \circ \tau, \varphi \rangle := \left\langle u, \left| \det \left( \frac{\partial \tau^{-1}}{\partial y} \right) \right| \cdot (\varphi \circ \tau^{-1}) \right\rangle, \quad \varphi \in X(\tilde{\Omega})$$

#### Bemerkungen:

(i)  $u \circ \tau$  ist tatsächlich eine Distribution. Linearität ist klar. Ist andererseits  $\varphi_\nu \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} \varphi$  in  $X(\tilde{\Omega})$  so gehen

$$\left| \det \left( \frac{\partial \tau^{-1}}{\partial y} \right) \right| \cdot (\varphi_\nu \circ \tau^{-1}) \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} \left| \det \left( \frac{\partial \tau^{-1}}{\partial y} \right) \right| \cdot (\varphi \circ \tau^{-1})$$

in  $X(\Omega)$  (vgl. 2.3.6 Bemerkung (v)), das heißt  $\langle u \circ \tau, \varphi_\nu \rangle \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} \langle u \circ \tau, \varphi \rangle$ .

(ii) Ist  $u_f$  regulär, erzeugt durch  $f \in L_{1,\text{loc}}(\Omega)$  bzw.  $f \in L_{1,\text{com}}(\Omega)$ , so ist  $u_f \circ \tau = u_{f\tau}$  auch regulär, erzeugt durch  $f \circ \tau \in L_{1,\text{loc}}(\tilde{\Omega})$  bzw.  $f \circ \tau \in L_{1,\text{com}}(\tilde{\Omega})$ .

<sup>6</sup>Ein  $\mathcal{C}^k$ -Diffeomorphismus  $\tau : \tilde{\Omega} \rightarrow \Omega$  ist eine Bijektion mit  $\tau, \tau^{-1} \in \mathcal{C}^k$ .

<sup>7</sup>Beachte dass stetige Abbildungen kompakte Mengen auf kompakte Mengen abbilden.

### 4.3.3 Satz: Distributionen mit einem Punktspektrum

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $x_0 \in \Omega$  und  $u \in \mathfrak{D}'(\Omega)$  mit  $\text{supp}(u) = \{x_0\}$ . Dann existieren  $N \in \mathbb{N}$  und  $c_\alpha \in \mathbb{R}$  mit

$$u = \sum_{|\alpha| \leq N} c_\alpha \cdot \partial^\alpha \delta_{x_0}$$

**Bemerkung:** Nach Lemma 2.3.8(3) folgt der Satz auch für  $u \in \mathcal{C}'(\Omega), S'(\mathbb{R}^n)$ .

**Beweis:** Sei  $(\Omega_j)_{j \in \mathbb{N}}$  Ausschöpfungsfolge von  $\Omega$ . Nach Fortsetzungssatz 3.3.1 kann  $u$  o.B.d.A. als Element aus  $\mathcal{C}'(\Omega)$  betrachtet werden. Dann existieren  $k$  und  $c$  mit

$$|\langle u, \psi \rangle| \leq c \cdot \|\psi\|_{\overline{\Omega}_{k,k}} \quad \forall \psi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$$

[1]. O.B.d.A. sei  $x_0 = 0$  und  $\varepsilon > 0$  hinreichend klein dass  $B_{2\varepsilon}^o(x_0) \subset \Omega$ . Nach Existenzlemma 2.4.4 existiert ein  $h \in \mathcal{C}_0^\infty(B_{2\varepsilon}^o(x_0))$  mit  $h(x) = 1$  für  $\|x\| \leq \varepsilon$ . Entsprechend gilt für

$$h_j(x) := h(2^j x)$$

dass  $h_j(x) = 1$  für  $\|x\| \leq 2^{-j}\varepsilon$ . Schreibt man

$$\varphi(x) = \sum_{|\alpha| \leq N} \frac{1}{\alpha!} (\partial^\alpha \varphi)(0) x^\alpha + r(x)$$

für  $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$  und  $N := k$  mit der Restgliedabschätzung

$$|r(x)| \leq c' \cdot \|x\|^{N+1} \quad \text{bzw.} \quad |\partial^\gamma r(x)| \leq c'' \cdot \|x\|^{N+1-|\gamma|}$$

(beachte dass  $\text{supp}(\varphi)$  kompakt) so gilt zum einen

$$\begin{aligned} |\partial^\gamma (h_j \cdot r)(x)| &= \left| \sum_{\alpha+\beta=\gamma} \underbrace{C_{\alpha,\beta}}_{\text{const}} \partial^\alpha h_j(x) \cdot \partial^\beta r(x) \right| \leq \sum_{\alpha+\beta=\gamma} |C_{\alpha,\beta}| \cdot \underbrace{|\partial^\alpha h_j(x)|}_{\leq \sup_{\|x\| \leq 2\varepsilon} |\partial^\alpha h(x)| \cdot 2^{j|\alpha|}} \cdot \underbrace{|\partial^\beta r(x)|}_{\leq c'' |\varepsilon \cdot 2^{-j}|^{N+1-|\beta|} \text{ für } x \in \text{supp}(h_j)} \\ &\leq \sum_{\alpha+\beta=\gamma} \underbrace{C_{\alpha,\beta,\gamma}}_{\text{const}} \cdot 2^{j|\alpha|} \cdot |\varepsilon \cdot 2^{-j}|^{N+1-|\beta|} \leq \underbrace{C_\gamma}_{\text{const}} \cdot 2^{j|\gamma|} \cdot 2^{-j(N+1)} \\ &\stackrel{|\gamma| \leq k}{\leq} \underbrace{C'_k}_{\text{const}} \cdot \underbrace{2^{jk} \cdot 2^{-j(N+1)}}_{\substack{2^{-j} \\ \text{da } k=N}} \end{aligned}$$

und dementsprechend

$$|\langle u, h_j r \rangle| \leq c \cdot \|h_j \cdot r\|_{\overline{\Omega}_{k,k}} \leq \tilde{c}_k \cdot 2^{-j}$$

Wegen  $h|_{\text{supp } u}, h_j|_{\text{supp } u} = 1$  ist nach Satz 4.1.3 stets  $hu = h_j u = u$ , das heißt

$$|\langle u, hr \rangle| = |\langle u, h_j r \rangle| \leq \tilde{c}_k \cdot 2^{-j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$$

Somit:

$$\langle u, \varphi \rangle = \langle u, h\varphi \rangle = \sum_{|\alpha| \leq N} \frac{1}{\alpha!} (\partial^\alpha \varphi)(0) \underbrace{\langle u, hx^\alpha \rangle}_{\text{const}_\alpha} + \underbrace{\langle u, hr \rangle}_0 = \sum_{|\alpha| \leq N} \underbrace{\frac{\langle u, hx^\alpha \rangle}{\alpha!}}_{c_\alpha} (-1)^\alpha \cdot \langle \partial^\alpha \delta_0, \varphi \rangle$$

□

#### 4.3.4 Bemerkung: Multiplikation von $\delta$ -Distributionen

Gesucht sei eine Distributionenalgebra mit den Operationen

- i. Differentiation
- ii. Multiplikation
- iii. Variablentransformation

die im Falle regulärerer Distributionen (*klassische Funktionen*) mit den üblichen Rechenregeln übereinstimmen. Dann kann z.B.  $\delta_0^2$  ( $\delta \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R})$ ) nicht sinnvoll definiert werden.

**Erläuterung:** Unter der sinnvollen Forderung  $\text{supp}(\delta_0^2) = \{0\}$  erhält man nach Satz 4.3.3 die Darstellung

$$\delta_0^2 = \sum_{l=0}^N c_l \partial^l \delta_0$$

Sei  $\lambda \neq 0$ , dann induziert  $\lambda$  die Koordinatentransformation

$$\begin{aligned} \langle \delta_0^2(\lambda x), \varphi \rangle &= \left\langle \delta_0^2, \varphi(\lambda^{-1}x) \frac{1}{|\lambda|} \right\rangle = \sum_{l=0}^N c_l (-1)^l \left\langle \delta_0, \partial^l (\varphi(\lambda^{-1}x)) \frac{1}{|\lambda|} \right\rangle \\ &= \sum_{l=0}^N c_l (-1)^l \frac{\lambda^{-l}}{|\lambda|} (\partial^l \varphi)(0) = \sum_{l=0}^N c_l \frac{\lambda^{-l}}{|\lambda|} \langle \partial^l \delta_0, \lambda \rangle \end{aligned}$$

also

$$\delta_0^2(\lambda x) = \sum_{l=0}^N c_l \frac{\lambda^{-l}}{|\lambda|} \partial^l \delta \quad (4.3.4.1)$$

Andererseits ist

$$\delta_0(\lambda x) = \frac{1}{|\lambda|} \delta_0(x)$$

bzw.

$$\delta_0^2(\lambda x) = \frac{1}{|\lambda|^2} \delta_0^2(x) = \frac{1}{\lambda^2} \sum_{l=0}^N c_l \partial^l \delta \quad (4.3.4.2)$$

Vergleich<sup>8</sup> mit (4.3.4.1) liefert

$$c_l \frac{\lambda^{-l}}{|\lambda|} = c_l \lambda^{-2} \quad \forall l = 0, \dots, N$$

Insbesondere  $c_l = 0 \quad \forall l$ , was keinen Sinn ergibt!

## 4.4 Faltung von Funktionen

### 4.4.1 Definition: Faltung von Funktionen

Zu Funktionen  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  definiert man die *Faltung*  $f * g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y) dy \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n$$

insofern das Integral für fast alle  $x$  existiert und endlich ist.

<sup>8</sup>Es können immer Testfunktionen  $\varphi_0, \dots, \varphi_N \in \mathfrak{D}(\mathbb{R})$  gefunden werden mit  $\varphi_i^{(i)}|_0 \neq 0$  und  $\varphi_i^{(j)}|_0 = 0$  für  $i < j$ . Diese eingesetzt reduzieren den Vergleich der Summe auf einen Koeffizientenvergleich.

**Bemerkungen:**

- (i) Für  $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$  existiert  $f * g$  und es gilt sogar  $f * g \in L_1(\mathbb{R}^n)$ .  
(ii) Allgemeiner: Nach Young gilt die Ungleichung<sup>9</sup>

$$\|f * g\|_{L_r} \leq \|f\|_{L_p} \cdot \|g\|_{L_q}$$

für

$$1 \leq p, q, r \leq \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$$

So ist z.B. für  $f \in L_1, g \in L_\infty$ :

$$(f * g) \in L_\infty$$

- (iii) Insbesondere existiert  $f * g$  für  $f, g \in S(\mathbb{R}^n)$  bzw.  $f, g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ .  
(iv) Andererseits ist für beide  $f, g$  eine *Wachstumsbeschränkung* notwendig. So existiert z.B. für

$$f(x) := e^{-\|x\|^2}, \quad g(x) := e^{\|x\|^2}$$

die Faltung  $f * g$  nicht.

**4.4.2 Lemma: Eigenschaften der Faltung**

Es seien  $\varphi, \psi, \chi \in S(\mathbb{R}^n)$ . Dann gilt:

1.  $(\varphi * \psi) = (\psi * \varphi)$
2.  $(\varphi * \psi) * \chi = \varphi * (\psi * \chi)$
3.  $D^\alpha(\varphi * \psi) = (D^\alpha \varphi) * \psi = \varphi * (D^\alpha \psi)$
4.  $(\varphi * \psi) \in S(\mathbb{R}^n)$

**Beweis:** Aussagen (1), (2) & (3) sind klar. Für Aussage (4) sei notiert die allgemeine Ungleichung für Normen:

$$(1 + \|x\|^2) \leq [1 + (\|x - y\| + \|y\|)^2] \leq [1 + 2(\|x - y\|^2 + \|y\|^2)] \leq 2[1 + \|x - y\|^2] \cdot [1 + \|y\|^2] \quad (4.4.2.1)$$

Nach Definition (2.3.2.1) von  $S(\mathbb{R}^n)$  ist zu zeigen dass

$$\|\varphi * \psi\|_{k,j} := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + \|x\|^2)^{\frac{j}{2}} \sum_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha(\varphi * \psi)(x)| < \infty \quad \forall k, j \in \mathbb{N}_0$$

<sup>9</sup>Zu Maßraum  $(\Omega, \mathfrak{C}, \mu)$  und Banachraum  $(X, \|\cdot\|)$  heißt eine messbare Abbildung  $f : \omega \rightarrow X$  *wesentlich beschränkt*, wenn es eine Zahl  $R > 0$  gibt so dass

$$\mu(x \in \Omega : \|f(x)\| > R) = 0$$

ist, das heißt es existiert ein beschränkter Repräsentant in der Äquivalenzklasse von  $f$ . Dabei heißt  $R$  *wesentliche Schranke* von  $f$  und

$$\|f\|_{L_\infty} := \text{ess sup } \|f\| = \inf \{M > 0 : M \text{ wesentliche Schranke}\} = \inf_{\substack{N \in \mathfrak{C} \\ \mu(N)=0}} \sup_{x \in \Omega/N} \|f(x)\|$$

*wesentliches Supremum* von  $f$ . Die Menge aller wesentlich beschränkten Funktionen  $f : \Omega \rightarrow X$  bezeichnet man mit  $L_\infty(\Omega, X)$ .

Seien nun  $j \in \mathbb{N}_0$  und  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$  beliebig, dann können wir abschätzen

$$\begin{aligned}
(1 + \|x\|^2)^{\frac{j}{2}} \underbrace{\left| D_x^\alpha (\varphi * \psi)(x) \right|}_{(D^\alpha \varphi) * \psi} &\leq \int_{\mathbb{R}^n} (1 + \|x\|^2)^{\frac{j}{2}} |D_x^\alpha \varphi(x - y)| \cdot |\psi(y)| \, dy \\
&\stackrel{(4.4.2.1)}{\leq} \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{2^{\frac{j}{2}} (1 + \|x - y\|^2)^{\frac{j}{2}} |D_x^\alpha \varphi(x - y)|}_{\leq \|\varphi\|_{|\alpha|, j}} \cdot \underbrace{(1 + \|y\|^2)^{\frac{j}{2}} (1 + \|y\|^2)^{\frac{n+1}{2}} |\psi(y)|}_{\leq \|\psi\|_{0, j+n+1}} (1 + \|y\|^2)^{-\frac{n+1}{2}} \, dy \\
&\leq 2^{\frac{j}{2}} \|\varphi\|_{|\alpha|, j} \|\psi\|_{0, j+n+1} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} (1 + \|y\|^2)^{-\frac{n+1}{2}} \, dy}_{C_n < \infty}
\end{aligned}$$

das heißt

$$\|\varphi * \psi\|_{k, j} \leq C \cdot \|\varphi\|_{k, j} \cdot \|\psi\|_{0, j+n+1} < \infty \quad \forall k, j \in \mathbb{N}_0$$

□

## 4.5 Fouriertransformation von Funktionen

### 4.5.1 Definition: Fouriertransformierte

Sei  $\varphi \in L_1(\mathbb{R}^n)$ . Dann heißt

$$\tilde{\varphi}(\xi) := \mathcal{F}(\varphi)(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} \varphi(x) \, dx$$

Fouriertransformierte von  $\varphi$ .

**Bemerkung:** Die Definition ist sinnvoll, denn das Integral existiert immer und ist endlich:

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} |e^{-ix\xi} \varphi(x)| \, dx = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)| \, dx}_{\|\varphi\|_{L_1}} < \infty$$

Insbesondere kann man abschätzen

$$\|\mathcal{F}(\varphi)\|_\infty \leq \text{const} \cdot \|\varphi\|_{L_1} \tag{4.5.1.1}$$

**Beispiel:** Sei  $\tilde{f}$  die Fouriertransformierte von  $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$  auf  $\mathbb{R}$ , das heißt

$$\tilde{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
\frac{d\tilde{f}}{d\xi}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (-ix) e^{-ix\xi} e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} i \frac{d}{dx} \left( e^{-\frac{x^2}{2}} \right) e^{-ix\xi} \, dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (-i) e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{d}{dx} (e^{-ix\xi}) \, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (-i\xi) e^{-i\xi x} e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx \\
&= -\xi \cdot \tilde{f}(\xi)
\end{aligned}$$

Andererseits besitzt  $\tilde{f}$  den Anfangswert

$$\tilde{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx}_{\sqrt{2\pi}} = 1$$

und somit die eindeutige Lösung

$$\tilde{f}(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}}$$

**Allgemeiner:** Nach Fubini erhält man aus dem 1-dimensionalen Fall

$$\mathcal{F}\left[e^{-\frac{\|x\|^2}{2}}\right](\xi) = e^{-\frac{\|\xi\|^2}{2}}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \quad (4.5.1.2)$$

in  $\mathbb{R}^n$ .

#### 4.5.2 Beispiel: Das Abtasttheorem

Die Fouriertransformierte von  $1_{[-N,N]}$  ergibt sich gemäß

$$\tilde{1}_{[-N,N]}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^N e^{-ix\xi} dx = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sin(N\xi)}{\xi} & : \xi \neq 0 \\ N\sqrt{\frac{2}{\pi}} & : \xi = 0 \end{cases} \stackrel{\text{formal}}{=} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sin(N\xi)}{\xi} \quad (4.5.2.1)$$

Daraus ergibt sich folgender Zusammenhang mit dem Abtasttheorem: Sei  $\tilde{f}$  stückweise stetig und bandbegrenzt, das heißt  $\tilde{f}(\xi) = 0$  für  $|\xi| > \alpha$ . Dann gilt:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k\pi}{\alpha}\right) \frac{\sin(\alpha x - k\pi)}{\alpha x - k\pi}$$

**Beweis:** Zum Beweis wird eine Variante der Fouriertransformation für Funktionen mit kompaktem Träger verwendet. Er lässt sich etwa wie folgt skizzieren:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\xi) &= \chi_{[-\alpha,\alpha]} \tilde{f}(\xi) \\ &= \chi_{[-\alpha,\alpha]}(\xi) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\alpha} \int_{[-\alpha,\alpha]} \tilde{f}(\eta) e^{i\eta k \frac{\pi}{\alpha}} d\eta e^{i\xi k \frac{\pi}{\alpha}} \\ &\stackrel{4.2.4(v)}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k\pi}{\alpha}\right) \frac{\sqrt{2\pi}}{2\alpha} \chi_{[-\alpha,\alpha]}(\xi) e^{i\xi k \frac{\pi}{\alpha}} \\ \Rightarrow f(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k\pi}{\alpha}\right) \frac{\sqrt{2\pi}}{2\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} \chi_{[-\alpha,\alpha]}(\xi) e^{i\xi k \frac{\pi}{\alpha}} d\xi \end{aligned}$$

#### 4.5.3 Rechenregeln der Fouriertransformation

Für  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  gilt:

1.  $\partial^\alpha \mathcal{F}(\varphi)(\xi) = \mathcal{F}(x \mapsto (-ix)^\alpha \varphi(x))(\xi)$  für Multiindex  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ .
2.  $(i\xi)^\alpha \cdot \mathcal{F}(\varphi)(\xi) = \mathcal{F}(\partial^\alpha \varphi)(\xi)$  für  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ .
3.  $\mathcal{F}(x \mapsto \varphi(\lambda x))(\xi) = |\lambda|^{-1} \mathcal{F}(\varphi)\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)$  für  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .
4.  $\mathcal{F}(x \mapsto \varphi(x+y))(\xi) = e^{iy\xi} \cdot \mathcal{F}(\varphi)(\xi)$  für  $y \in \mathbb{R}^n$ .

**Beweis:**

1.

$$\partial^\alpha \mathcal{F}(\varphi)(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \cdot \partial_\xi^\alpha \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} \varphi(x) dx = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} (-ix)^\alpha e^{-ix\xi} \varphi(x) dx = \mathcal{F}(x \mapsto (-ix)^\alpha \varphi(x))(\xi)$$

2.

$$(i\xi)^\alpha \mathcal{F}(\varphi)(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} (i\xi)^\alpha e^{-i\xi x} \varphi(x) dx = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(-1)^{|\alpha|}} \partial_x^\alpha (e^{-ix\xi}) \varphi(x) dx$$

$$\stackrel{\text{P.I.}}{=} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(-1)^{|\alpha|}} e^{-ix\xi} \partial_x^\alpha \varphi(x) dx = \mathcal{F}(\partial^\alpha \varphi)(\xi)$$

3.

$$\mathcal{F}(\varphi(\lambda \cdot))(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} \varphi(\lambda x) dx \stackrel{y:=\lambda x}{=} |\lambda|^{-1} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\xi}{\lambda} x} \varphi(y) dy$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\mathcal{F}(\varphi)(\frac{\xi}{\lambda})}$

4.

$$\mathcal{F}(\varphi(\cdot + y))(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} \varphi(x + y) dx \stackrel{z:=x+y}{=} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(z-y)\xi} \varphi(z) dz$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{e^{iy\xi} \mathcal{F}(\varphi)(\xi)}$

**4.5.4 Satz über die Fouriertransformation**

1. Die Fouriertransformation ist eine lineare & stetige Abbildung  $\mathcal{F} : S(\mathbb{R}^n) \rightarrow S(\mathbb{R}^n)$ .
2. Die Fouriertransformation  $\mathcal{F} : S(\mathbb{R}^n) \rightarrow S(\mathbb{R}^n)$  ist bijektiv mit Umkehrabbildung

$$\mathcal{F}^{-1}(\tilde{\psi})(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} \cdot \tilde{\psi}(\xi) d\xi = \mathcal{F}(\tilde{\psi})(-x)$$

**Beweis:**

1. Linearität ist klar.

Zeigen nun  $\mathcal{F}(\varphi) \in S(\mathbb{R}^n)$  für  $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ . Glattheit von  $\mathcal{F}(\varphi)$  ist klar. Nach den Rechenregeln 4.5.3 genügt es nun zu zeigen  $\|\mathcal{F}(\varphi)\|_\infty < \infty$ , denn dann wäre

$$\left| \xi^\alpha \partial_\xi^\beta \tilde{\varphi}(\xi) \right| \stackrel{(4.5.3)}{=} \left| (-i)^{|\alpha+\beta|} \underbrace{\mathcal{F}[\partial_x^\alpha (x^\beta \varphi)]}_{\in S(\mathbb{R}^n)}(\xi) \right| \leq \|\mathcal{F}[\partial_x^\alpha (x^\beta \varphi)]\|_\infty < \infty, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$$

und nach 2.3.2 (v)  $\mathcal{F}(\varphi) \in S(\mathbb{R}^n)$ . Tatsächlich ist

$$|\mathcal{F}(\varphi)(\xi)| \leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{|e^{-ix\xi}|}_1 |\varphi(x)| dx = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \cdot \|\varphi\|_1 \stackrel{(2.3.4.1)}{<} \infty \quad (\spadesuit)$$

Zu zeigen: Stetigkeit von  $\mathcal{F}$ . Für  $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$  und  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$  gilt

$$\|x^\alpha \partial_\xi^\beta \tilde{\varphi}(\xi)\|_\infty \stackrel{(4.5.3)}{=} \left| (-i)^{|\alpha|+|\beta|} \mathcal{F}[\partial_x^\alpha (x^\beta \varphi)](\xi) \right| \stackrel{(\spadesuit)}{\leq} \text{const} \cdot \|\partial^\alpha (x^\beta \varphi)\|_1$$

Sind  $\varphi_\nu \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} \varphi$  in  $S(\mathbb{R}^n)$ , so gehen nach (2.3.4.1)  $\|\partial^\alpha (x^\beta (\varphi_\nu - \varphi))\|_1 \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} 0$  also

$$\|x^\alpha \partial^\beta (\tilde{\varphi}_\nu - \tilde{\varphi})\|_\infty \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} 0$$

bzw.  $\tilde{\varphi}_\nu \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} \tilde{\varphi}$ .



2. Zur Bijektivität von  $\mathcal{F}$  genügt es zu zeigen dass gilt

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} \cdot \tilde{\varphi}(\xi) d\xi$$

denn dann folgt automatisch:

- Surjektivität  $\mathcal{F}(S(\mathbb{R}^n)) = S(\mathbb{R}^n)$ , denn zu  $\psi \in S(\mathbb{R}^n)$  wähle  $\varphi(x) := \tilde{\psi}(-x)$ , dann:

$$\psi(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} \cdot \tilde{\psi}(\xi) d\xi = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} \cdot \underbrace{\tilde{\psi}(-\xi)}_{\varphi(x)} d\xi = \mathcal{F}(\varphi)(x)$$

- Injektivität, denn  $\text{kernel}(\mathcal{F}) = \{0\}$ .

**Bemerkung**, dass das Integral

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{i(x-y)\xi} \varphi(y) dy d\xi$$

im allgemeinen nicht existiert!

**Vorüberlegung:** Für  $\varphi, \psi \in S(\mathbb{R}^n)$  gilt stets

$$\int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\tilde{\varphi}}_{\in S(\mathbb{R}^n)}(\xi) \cdot \psi(\xi) e^{ix\xi} d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) \cdot \underbrace{\tilde{\psi}}_{\in S(\mathbb{R}^n)}(y-x) dy \quad (4.5.4.1)$$

denn

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\varphi}(\xi) \psi(\xi) e^{ix\xi} d\xi &= \int_{\mathbb{R}^n} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy\xi} \varphi(y) \psi(\xi) e^{ix\xi} dy d\xi \stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(y-x)\xi} \psi(\xi) d\xi dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) \cdot \tilde{\psi}(y-x) dy \end{aligned}$$

Setzt man nun für irgendein  $\varepsilon > 0$ :

$$\psi(\xi) := e^{-\frac{\varepsilon^2 \|\xi\|^2}{2}} \rightsquigarrow \tilde{\psi}(y) = \varepsilon^{-n} \exp\left[-\frac{\|y\|^2}{2\varepsilon^2}\right]$$

dann ist nach (4.5.4.1):

$$\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\varphi}(\xi) e^{ix\xi} \exp\left[-\frac{\varepsilon^2 \|\xi\|^2}{2}\right] d\xi = \varepsilon^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) \exp\left[-\frac{\|x-y\|^2}{2\varepsilon^2}\right] dy$$

$$\stackrel{z := \frac{x-y}{\varepsilon}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x - \varepsilon z) e^{-\frac{\|z\|^2}{2}} dz \quad \forall \varepsilon > 0 \quad (\clubsuit)$$

Dabei gehen

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(\xi) \exp\left[-\frac{\varepsilon^2 \|\xi\|^2}{2}\right] e^{ix\xi} &\xrightarrow[\text{punktweise}]{\varepsilon \searrow 0} \tilde{\varphi}(\xi) e^{ix\xi} \\ \varphi(x - \varepsilon z) e^{-\frac{\|z\|^2}{2}} &\xrightarrow[\text{punktweise}]{\varepsilon \searrow 0} \varphi(x) e^{-\frac{\|z\|^2}{2}} \end{aligned}$$

und die Majoranten

$$|\tilde{\varphi}(\xi)| \geq \left| \tilde{\varphi}(\xi) \exp \left[ -\frac{\varepsilon^2 \|\xi\|^2}{2} \right] e^{ix\xi} \right|$$

$$\|\varphi\|_\infty e^{-\frac{\|\varepsilon z\|^2}{2}} \geq \left| \varphi(x - \varepsilon z) e^{-\frac{\|\varepsilon z\|^2}{2}} \right|$$

sind beide integrierbar. Nach Lebesgue (Satz der majorisierten Konvergenz) geht dann (♣) mit  $\varepsilon \searrow 0$  über in die Form

$$\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\varphi}(\xi) e^{ix\xi} d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-\frac{\|z\|^2}{2}} dz = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \varphi(x)$$

□

### 4.5.5 Satz: Isometrie der Fouriertransformation (Plancherell)

Die Fouriertransformation  $\mathcal{F} : L_2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^n)$  ist eine Isometrie.

**Beweis:** Für  $\varphi, \psi \in S(\mathbb{R}^n)$  gilt stets

$$\mathcal{F}(\psi^*)(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \left[ \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi x} \varphi(x) dx \right]^* = \mathcal{F}^*(\psi)(-\xi)$$

Außerdem ist

$$\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\varphi}(\xi) \psi(\xi) e^{ix\xi} = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) \tilde{\psi}(y-x) dy \tag{♣}$$

(vgl. (4.5.4.1)) und speziell für  $x = 0$ :

$$\underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(\varphi)(\xi) \cdot \mathcal{F}^*(\psi)(\xi) d\xi}_{\langle \mathcal{F}(\varphi), \mathcal{F}(\psi) \rangle_{L_2}} \stackrel{(\clubsuit)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) \cdot \underbrace{\mathcal{F}[\mathcal{F}^*(\psi)](y)}_{\mathcal{F}^*[\mathcal{F}(\psi)](-y)} dy = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) \cdot \underbrace{[\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}(\psi)](y)]^*}_{\psi} dy = \langle \varphi, \psi \rangle_{L_2}$$

das heißt  $\mathcal{F} : S(\mathbb{R}^n) \rightarrow S(\mathbb{R}^n)$  ist eine Isometrie bzgl. der  $L_2$ -Norm, also auch stetig bzgl. dieser! Nach 2.3.4 ist  $S(\mathbb{R}^n)$  dicht im Hilbertraum  $L_2$ . Nach Fortsetzungssatz A.0.10 kann  $\mathcal{F}$  auf  $L_2(\mathbb{R}^n)$  stetig, unitär, eindeutig fortgesetzt werden.

□

**Bemerkung:** Klassisch ist die Fouriertransformierte von  $L_2$ -Funktionen nicht definiert.  $\mathcal{F} : L_2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^n)$  ist lediglich eine stetige Fortsetzung von  $S(\mathbb{R}^n)$  auf  $L_2$ . Im Falle  $f \in S(\mathbb{R}^n) \cap L_2(\mathbb{R}^n)$ , ist diese jedoch konsistent mit der klassischen Definition von  $\mathcal{F}(f)$ .<sup>10</sup>

### 4.5.6 Faltungssatz

Für  $\varphi, \psi \in S(\mathbb{R}^n)$  gilt

$$\mathcal{F}(\varphi * \psi) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \cdot \mathcal{F}(\varphi) \cdot \mathcal{F}(\psi)$$

$$\mathcal{F}(\varphi) * \mathcal{F}(\psi) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \cdot \mathcal{F}(\varphi \cdot \psi)$$

<sup>10</sup>Für  $(f_n) \subset S(\mathbb{R}^n)$ ,  $f \in S(\mathbb{R}^n) \cap L_2(\mathbb{R}^n)$  mit  $f_n \xrightarrow[L_2]{n \rightarrow \infty} f$  gehen auch  $\mathcal{F}(f_n) \xrightarrow[L_2]{n \rightarrow \infty} \underbrace{\mathcal{F}(f)}_{\text{klassische Definition}}$ .

**Beweis:**

$$(2\pi)^{\frac{n}{2}} \tilde{\varphi}(\xi) \tilde{\psi}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy\xi} \varphi(y) dy \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} \psi(x) dx \stackrel{x=z-y}{=} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy\xi} \varphi(y) dy \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(z-y)\xi} \psi(z-y) dz dy$$

$$\stackrel{\text{Fubini}}{=} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iz\xi} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) \psi(z-y) dy dz = \mathcal{F}(\varphi * \psi)(\xi)$$

□

## 4.6 Fouriertransformation für Distributionen

### 4.6.1 Definition: Fouriertransformation

Zu Distribution  $u \in S'(\mathbb{R}^n)$  definiert man die *Fouriertransformierte*  $\mathcal{F}(u)$  gemäß:

$$\langle \mathcal{F}(u), \varphi \rangle := \langle u, \mathcal{F}(\varphi) \rangle \quad , \quad \varphi \in S(\mathbb{R}^n)$$

**Bemerkungen:**

(i)  $\mathcal{F}(u) : S(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$  ist tatsächlich eine Distribution in  $S'(\mathbb{R}^n)$ .

**Beweis:** Linearität ist klar, Stetigkeit folgt aus Stetigkeit von  $\mathcal{F} : S(\mathbb{R}^n) \rightarrow S(\mathbb{R}^n)$ .

(ii) Die Fouriertransformation  $\mathcal{F} : S'(\mathbb{R}^n) \rightarrow S'(\mathbb{R}^n)$  ist linear, stetig (bzgl. der schwachen Konvergenz von Distributionen).

**Beweis:** Klar!

### 4.6.2 Satz: Bijektivität der Fouriertransformation

Die Fouriertransformation  $\mathcal{F} : S'(\mathbb{R}^n) \rightarrow S'(\mathbb{R}^n)$  ist bijektiv, mit Umkehrabbildung

$$v \mapsto \mathcal{F}^{-1}(v) \quad , \quad \langle \mathcal{F}^{-1}(v), \varphi \rangle := \langle v, \mathcal{F}^{-1}(\varphi) \rangle \quad , \quad \varphi \in S(\mathbb{R}^n)$$

**Beweis:** Injektivität: Für  $u, v \in S'(\mathbb{R}^n)$  gilt:

$$\mathcal{F}(u) = \mathcal{F}(v) \Leftrightarrow \underbrace{\langle \mathcal{F}(u), \varphi \rangle}_{\langle u, \mathcal{F}(\varphi) \rangle} = \underbrace{\langle \mathcal{F}(v), \varphi \rangle}_{\langle v, \mathcal{F}(\varphi) \rangle} \quad \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n)$$

$$\begin{array}{c} \mathcal{F}: S(\mathbb{R}^n) \rightarrow S(\mathbb{R}^n) \\ \xrightarrow{\text{surjektiv}} \end{array} \quad \langle u, \psi \rangle = \langle v, \psi \rangle \quad \forall \psi \in S(\mathbb{R}^n)$$

$$\Rightarrow u = v$$

Surjektivität: Zu  $v \in S'(\mathbb{R}^n)$  betrachten die Distribution

$$\langle u, \varphi \rangle := \langle v, \mathcal{F}^{-1}(\varphi) \rangle \quad , \quad \varphi \in S(\mathbb{R}^n)$$

Dann gilt

$$\langle \mathcal{F}(u), \varphi \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{\langle u, \mathcal{F}(\varphi) \rangle}_{\langle v, \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\varphi)) \rangle} = \langle v, \varphi \rangle \quad , \quad \varphi \in S(\mathbb{R}^n)$$

das heißt  $\mathcal{F}(u) = v$ .

□

### 4.6.3 Satz: Konsistenz der Fouriertransformation für reguläre Distributionen

Die Fouriertransformation  $\mathcal{F} : S'(\mathbb{R}^n) \rightarrow S'(\mathbb{R}^n)$  ist eine natürliche Erweiterung: Für  $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$  bzw.  $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$  ist

$$u_{\mathcal{F}(f)} = \mathcal{F}(u_f)$$

Beachte dass tatsächlich  $u_f, u_{\mathcal{F}(f)} \in S'(\mathbb{R}^n)$  sind (vgl. Bemerkung 3.1.8 und Abschätzung (4.5.1.1)).

**Beweis:** Sei zunächst  $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ . Für  $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$  ist

$$\langle \mathcal{F}(u_f), \varphi \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle u_f, \mathcal{F}(\varphi) \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \tilde{\varphi}(x) dx = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} \varphi(\xi) d\xi dx$$

$$\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(\xi) \varphi(\xi) d\xi = \langle u_{\mathcal{F}(f)}, \varphi \rangle$$

Sei nun  $f \in L_2$ , dann existieren  $(f_n) \subseteq S(\mathbb{R}^n)$  mit  $f_n \xrightarrow[L_2]{n \rightarrow \infty} f$  bzw.  $\mathcal{F}(f_n) \xrightarrow[L_2]{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}(f)$ . Nach (3.1.8.1) also

$$u_{\mathcal{F}(f_n)} \xrightarrow[\text{schwach}^*]{n \rightarrow \infty} u_{\mathcal{F}(f)}$$

Aus dem gleichen Grund gehen auch  $u_{f_n} \xrightarrow[\text{schwach}^*]{n \rightarrow \infty} u_f$  das heißt nach Bemerkung 4.6.1(ii):

$$\mathcal{F}(u_{f_n}) \xrightarrow[\text{schwach}^*]{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}(u_f)$$

Da  $\mathcal{F}(u_{f_n}) \stackrel{f_n \in L_1}{=} u_{\mathcal{F}(f_n)}$  ist wegen der Eindeutigkeit des schwachen Grenzwertes

$$u_{\mathcal{F}(f)} = \mathcal{F}(u_f)$$

□

### 4.6.4 Rechenregeln für Fouriertransformation von Distributionen

Für Distribution  $u \in S'(\mathbb{R}^n)$  gilt

1.  $\partial^\alpha \mathcal{F}(u) = \mathcal{F}((-ix)^\alpha u)$  für Multiindex  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ .
2.  $(ix)^\alpha \mathcal{F}(u) = \mathcal{F}(\partial^\alpha u)$ .

**Beweis:** Analog zu 4.5.3.

### 4.6.5 Beispiel: Fouriertransformation der $\delta$ -Distribution

Betrachtet sei die Dirac-Distribution  $\delta_0 \in S'(\mathbb{R}^n)$ . Dann ist

$$\langle \mathcal{F}(\delta_0), \varphi \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle \delta_0, \mathcal{F}(\varphi) \rangle = \tilde{\varphi}(0) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot 0} \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \varphi(x) dx = \langle u_{(2\pi)^{-\frac{n}{2}}}, \varphi \rangle$$

das heißt

$$\boxed{\mathcal{F}(\delta_0) = u_{(2\pi)^{-\frac{n}{2}}}} \quad (4.6.5.1)$$

**Beachte:** Als Fouriertransformierte von  $\delta_0 \in S'(\mathbb{R}^n)$  ist  $\tilde{\delta}_0 \in S'(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ . Doch obwohl  $\delta_0 \in \mathcal{C}'(\mathbb{R}^n)$ , ist  $\tilde{\delta}_0 \notin \mathcal{C}'(\mathbb{R}^n)$ .

**Interpretation:** Mit  $\mathcal{F}^{-1}\left(u_{(2\pi)^{-\frac{n}{2}}}\right) = \delta_0$  erhält man *formal*  $\mathcal{F}^{-1}\left((2\pi)^{-\frac{n}{2}}\right) = \delta_0$ . Hinsichtlich dieses *Zusammenhangs*, wird oft geschrieben

$$(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\xi} \varphi(y) dy d\xi \stackrel{\text{formale Umrechnung}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-z) \underbrace{(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{iz\xi} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} d\xi}_{\mathcal{F}^{-1}\left((2\pi)^{-\frac{n}{2}}\right)(z)} dz \quad \Bigg| \quad z := x - y$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-z) \delta_{z=0} dz \stackrel{\text{formale def.}}{=} \langle \delta_0, \varphi(x - \cdot) \rangle = \varphi(x - 0) = \varphi(x) \quad \Bigg| \quad (\text{vgl. 4.3.2})$$

**Spezialfall:** Hatten gesehen dass

$$\tilde{1}_{[-N, N]}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sin(N\xi)}{\xi}, \quad N \in \mathbb{N}$$

(vgl. (4.5.2.1)) wobei  $u_{\tilde{1}_{[-N, N]}} \in S'(\mathbb{R})$  ist. Nach Beispiel 3.2.1(2) gehen einerseits

$$u_{\tilde{1}_{[-N, N]}} \xrightarrow[\text{schwach}^*]{N \rightarrow \infty} \sqrt{2\pi} \cdot \delta_0$$

Andererseits: Wegen

$$u_{1_{[-N, N]}} \xrightarrow[\text{schwach}^*]{N \rightarrow \infty} u_1 \quad (\text{in } S'(\mathbb{R}^n))$$

(vgl. Lemma 3.1.10) geht aufgrund der Stetigkeit von  $\mathcal{F} : S'(\mathbb{R}^n) \rightarrow S'(\mathbb{R}^n)$  auch

$$\underbrace{\mathcal{F}(u_{1_{[-N, N]}})}_{\substack{u_{\tilde{1}_{[-N, N]}} \\ (4.6.3)}} \xrightarrow[\text{schwach}^*]{N \rightarrow \infty} \mathcal{F}(u_1)$$

Aufgrund der Eindeutigkeit des schwachen Grenzwertes also

$$\mathcal{F}(\sqrt{2\pi} \cdot \delta_0) = \mathcal{F}(u_1)$$

was genau dem Ergebnis (4.6.5.1) entspricht!

#### 4.6.6 Lemma über Distributionen mit Punkträger

Sei  $u \in S'(\mathbb{R}^n)$  mit  $\text{supp}(u) = \{0\}$ . Dann ist  $\tilde{u}$  eine reguläre Distribution, erzeugt durch ein Polynom endlicher Ordnung.

**Beweis:** Nach Satz 4.3.3 existiert ein  $N \in \mathbb{N}$  und Konstanten  $a_\alpha \in \mathbb{C}$  mit

$$u = \sum_{|\alpha| \leq N} a_\alpha \cdot \partial^\alpha \delta_0$$

Daher kann man für  $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$  schreiben:

$$\langle \tilde{u}, \varphi \rangle \stackrel{\text{def.}}{=} \langle u, \tilde{\varphi} \rangle \stackrel{(4.3.3)}{=} \sum_{|\alpha| \leq N} a_\alpha \langle \partial^\alpha \delta_0, \tilde{\varphi} \rangle \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{|\alpha| \leq N} a_\alpha (-1)^\alpha \langle \delta_0, \partial^\alpha \tilde{\varphi} \rangle$$

$$\stackrel{(4.5.3)}{=} \sum_{|\alpha| \leq N} a_\alpha (-1)^{|\alpha|} \langle \delta_0, \mathcal{F}((-ix)^\alpha \varphi(\cdot)) \rangle = \sum_{|\alpha| \leq N} a_\alpha \mathcal{F}((ix)^\alpha \varphi(x))(0)$$

$$= \sum_{|\alpha| \leq N} a_\alpha (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} (ix)^\alpha \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \underbrace{\sum_{|\alpha| \leq N} a_\alpha (ix)^\alpha \cdot \varphi(x)}_{=: P(x)} dx = \langle u_P, \varphi \rangle$$

□

#### 4.6.7 Laplace-Transformation von Funktionen

Zu  $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$  definiert man die *Laplace-Transformierte*  $\mathcal{L}(\varphi) : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$  gemäß

$$\mathcal{L}(\varphi)(z) := (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ixz} \varphi(x) dx, \quad z \in \mathbb{C}^n$$

#### 4.6.8 Definition: Laplace-Transformation von Distributionen

Zu Distribution  $u \in \mathcal{C}'(\mathbb{R}^n)$  definiert man die Laplace-Transformierte  $\mathcal{L}(u) : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$  gemäß

$$\mathcal{L}(u)(z) := (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \langle u, \exp[-iz(\cdot)] \rangle$$

#### 4.6.9 Satz von Paley-Wiener

Sei  $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ . Dann existiert ein  $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  (mit  $\text{supp}(\varphi) \subseteq B_R(0)$ ) so dass  $f = \mathcal{L}(\varphi)$  genau dann wenn  $f$  ganz-analytisch ist und zu jedem  $N \in \mathbb{N}_0$  ein  $C_N \in \mathbb{R}$  existiert mit

$$|f(z)| \leq C_N \left(1 + \|z\|^2\right)^{-\frac{N}{2}} e^{R|\Im(z)|} \quad \forall z \in \mathbb{C}^n$$

**Beweis:** Richtung "⇒". Ähnlich zur Fourier-Transformation (4.5.3), lässt sich leicht zeigen:

$$(iz)^\alpha \mathcal{L}(\varphi)(z) = \mathcal{L}(\partial^\alpha \varphi)(z), \quad \varphi \in S(\mathbb{R}^n)$$

Somit

$$\begin{aligned} |z^\alpha| \cdot |\mathcal{L}(\varphi)(z)| &\stackrel{\text{supp}(\varphi) \subseteq B_R(0)}{\leq} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{B_R(0)} |e^{-ixz}| \cdot |(\partial^\alpha \varphi)(x)| dx \\ &\leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sup_{\|x\| \leq R} |\partial^\alpha \varphi(x)| \cdot \int_{\|x\| \leq R} \underbrace{|\exp[-i\Re(z)x]| \cdot |\exp[\Im(z)x]|}_1 dx \\ &\leq \underbrace{C_{\alpha,R}}_{\text{const}} \cdot \exp[\|\Im(z)\| \cdot R] \quad \forall |\alpha| \leq N, z \in \mathbb{C}^n \\ \Rightarrow \left(1 + \|z\|^2\right)^{\frac{N}{2}} |\mathcal{L}(\varphi)(z)| &\leq \underbrace{\tilde{C}_{R,N}}_{\text{const}} \cdot \exp[\|\Im(z)\| \cdot R] \quad \forall z \in \mathbb{C}^n \end{aligned}$$

Ganz-Analytizität folgt aus

$$\partial^\alpha \mathcal{L}(\varphi) = \underbrace{\mathcal{L}(x \mapsto (-ix)^\alpha \varphi(x))}_{\substack{\text{existiert stets} \\ \text{da } \text{supp}(\varphi) \\ \text{kompakt}}}$$

Richtung "⇐". Sei nun  $f$  ganz-analytisch mit der Abschätzung

$$|f(z)| \leq \underbrace{C_N}_{\text{const}} \left(1 + \|z\|^2\right)^{-\frac{N}{2}} e^{R|\Im(z)|} \quad \forall z \in \mathbb{C}^n, N \in \mathbb{N}_0 \quad (\spadesuit)$$

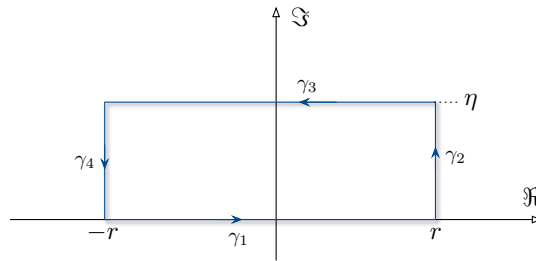
Dann erfüllt

$$\varphi(x) := (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} f(\xi) d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

zunächst die Bedingung  $\mathcal{L}\varphi = f$ . Tatsächlich ist sogar  $\varphi \in C^\infty$ , denn

$$\partial_x^\alpha \varphi(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} (i\xi)^\alpha f(\xi) d\xi}_{\substack{\in \mathbb{R} \\ \text{wegen } (\spadesuit)}}$$

Zu zeigen bleibt:  $\text{supp}(\varphi) \subseteq B_R(0)$ . Dazu sei o.B.d.A.  $n = 1$ . Zu  $\eta, r > 0$  sei betrachtet der Weg  $\gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \gamma_3 \oplus \gamma_4$  (siehe Abbildung 4).



**Abbildung 4:** Zum Beweis des Satzes von Paley-Wiener. Nach Cauchy ist das Integral über den gesamten geschlossenen Weg gleich 0.

Dann gilt für  $\gamma_2$  (und analog auch  $\gamma_3$ ) die Abschätzung

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_2} e^{ix\xi} f(\xi) d\xi \right| &\leq \int_{\gamma_2} \underbrace{\left| e^{ix(r+it)} i f(r+it) \right|}_{e^{-tx} |f(r+it)|} dt \stackrel{(\spadesuit)}{\leq} \int_0^\eta e^{t(R-x)} C_N (1 + |r|^2)^{-\frac{N}{2}} dt \\ &\leq C_{N,\eta,x,R} |r|^{-N} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Daher folgt nach Cauchyschem Integralsatz:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} f(\xi) d\xi = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}} f(\xi + i\eta) e^{ix(\xi+i\eta)} d\xi \\ \Rightarrow |\varphi(x)| &\stackrel{(\spadesuit)}{\leq} C_N \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi + i\eta|^2)^{-\frac{N}{2}} \underbrace{|e^{ix\xi}|}_1 e^{-x\eta} e^{R|\eta|} d\xi \leq \underbrace{\tilde{C}_N}_{\text{const}} e^{R|\eta| - x\eta}, \quad N \in \mathbb{N}_0, \eta > 0, x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Wählen nun  $\eta := \alpha \cdot x$  für irgendein  $\alpha > 0$ , dann

$$|\varphi(x)| \leq \tilde{C}_N e^{R\alpha|x| - \alpha|x|^2} \xrightarrow[ (|x| > R) ]{\alpha \rightarrow \infty} 0$$

das heißt  $\text{supp}(\varphi) \subseteq B_R(0)$ .

□

**Folgerung:** Die Laplace-Transformierte einer  $C^\infty$ -Funktion  $\varphi$  mit kompakten Träger kann nur im Trivialfall  $\varphi \equiv 0$  einen kompakten Träger besitzen<sup>11</sup>.

<sup>11</sup>Sind  $f, g$  analytisch auf dem Gebiet  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$  und  $f(z_n) = g(z_n)$  für eine Folge  $(z_n) \subset \Omega$ ,  $z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z \in \Omega$ ,  $z_n \neq z$ , so sind  $f = g$  auf ganz  $\Omega$ .

**4.6.10 Satz von Paley-Wiener-Schwartz**

Sei  $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ . Dann existiert ein  $u \in \mathcal{C}'(\mathbb{R}^n)$  (mit  $\text{supp}(u) \subseteq B_R(0)$ ) so dass  $f(z) = \mathcal{L}(u)(z)$  genau dann wenn  $f$  ganz-analytisch ist und

$$|f(z)| \leq C \cdot (1 + \|z\|^2)^{\frac{N}{2}} e^{R|\Im(z)|} \quad \forall z \in \mathbb{C}^n$$

für geeignete  $N \in \mathbb{N}$ ,  $C \in \mathbb{R}$ . (Ohne Beweis)



## 5 Verallgemeinerte Differentialgleichungen

### 5.0.11 Definition: Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten

Zu Konstanten  $a_\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$  heißt der Operator

$$P(\partial) := \sum_{|\alpha| \leq N} a_\alpha \cdot \partial^\alpha \quad (5.0.11.1)$$

*Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten.*

**Bemerkung:** Formal kann  $P \in \mathbb{C}^n[X]$  als Polynom  $N$ -ten Grades auf  $\mathbb{C}^n$  mit dem Differentialoperator  $\partial$  als Argument aufgefasst werden.

### 5.0.12 Verallgemeinerte Differentialgleichungen

Gegeben sei die Distribution  $\rho \in S'(\mathbb{R}^n)$  und der Differentialoperator

$$P(\partial) := \sum_{|\alpha| \leq N} a_\alpha \cdot \partial^\alpha$$

Gesucht ist nun eine Distribution  $u \in S'(\mathbb{R}^n)$  die die *Differentialgleichung*

$$P(\partial)u = \rho$$

erfüllt. Äquivalent dazu ist

$$\mathcal{F}(P(\partial)u) = \mathcal{F}(\rho)$$

Dabei existiert nach Rechenregeln 4.6.4 ein, nur von  $P$  abhängiges, Polynom  $\mathcal{S}_P \in \mathbb{C}^n[X]$  mit  $\mathcal{F}(P(\partial)u) = \mathcal{S}_P \mathcal{F}(u)$ , das heißt die Differentialgleichung nimmt die Form

$$\mathcal{S}_P \cdot \mathcal{F}(u) = \mathcal{F}(\rho)$$

an. Man nennt das für den Differentialoperator charakteristische Polynom  $\mathcal{S}_P$  *Symbol* von  $P(\partial)$ . Formal erhält man also die Lösung durch

$$u = \mathcal{F}^{-1} \left[ \frac{\mathcal{F}(\rho)}{\mathcal{S}_P} \right]$$

(falls Sinnvoll).

**Beispiel:** Der Laplace-Operator

$$\Delta = \sum_{j=1}^n \partial_{x^j}^2$$

besitzt das Symbol

$$\mathcal{S}_\Delta(\xi) = -\|\xi\|^2$$

Tabelle (1) zeigt weitere Symbole wichtiger Differentialoperatoren.

Operator	Symbol
Id - $\Delta$	$\mathcal{S}(\xi) = 1 + \ \xi\ ^2$
$\partial_t - \Delta$	$\mathcal{S}(\tau, \xi) = i\tau + \ \xi\ ^2$
$\partial_t^2 - \Delta$	$\mathcal{S}(\tau, \xi) = -\tau^2 + \ \xi\ ^2$

**Tabelle 1:** Symbole wichtiger Differentialoperatoren.

**5.0.13 Eigenschaften verallgemeinerter Differentialgleichungen**

Sei  $P[\partial]$  ein Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten und Symbol  $S_P$ .

1. Ist  $|S_P| \geq C > 0$  für irgendeine Konstante  $C \in \mathbb{R}$  so besitzt die Differentialgleichung  $P(\partial)u \stackrel{!}{=} u_\rho$  für jedes  $\rho \in L_2$  eine eindeutig bestimmte Lösung in  $L_2$ .<sup>12</sup>

2. Ist sogar

$$|S_P(\xi)| \geq C \cdot \left(1 + \|\xi\|^2\right)^{\frac{m}{2}} > 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{C}$$

für irgendwelche Konstanten  $C > 0$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , so ist die Lösung sogar aus  $W_2^m(\mathbb{R}^n)$ .

**Beweis:**

1. Nach Voraussetzung ist die Differentialgleichung  $P(\partial)u \stackrel{!}{=} u_\rho$  äquivalent zu

$$u = \mathcal{F}^{-1} \left[ \frac{\mathcal{F}(u_\rho)}{S_P} \right] \stackrel{\substack{\rho \in L_2 \\ (4.6.3)}}{=} \mathcal{F}^{-1} \left[ \frac{u_{\mathcal{F}(\rho)}}{S_P} \right] = \mathcal{F}^{-1} [u_{\mathcal{F}(\rho)/S_P}]$$

Dabei ist  $\frac{\mathcal{F}(\rho)}{S_P} \in L_2$ , denn

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\mathcal{F}(\rho)(\xi)|^2}{|S_P(\xi)|^2} d\xi \leq \frac{1}{C^2} \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{|\mathcal{F}(\rho)(\xi)|^2}_{\in L_2} d\xi < \infty$$

das heißt  $u = u_f$  ist für

$$f := \underbrace{\mathcal{F}^{-1} \left[ \frac{\mathcal{F}(\rho)}{S_P} \right]}_{\in L_2}$$

eine Lösung.

**Eindeutigkeit:** Es genügt zu zeigen: Aus  $P(\partial)v \stackrel{!}{=} 0$  folgt  $v = 0$ . Tatsächlich folgt aus

$$S_P \cdot \mathcal{F}(v) = 0$$

dass  $\mathcal{F}(v) = 0$  ist (vgl. 4.1.2 Bemerkung (iii)), also  $v = 0$ .

2. Nach Voraussetzung gilt sogar

$$\frac{\mathcal{F}(\rho)}{S_P} \in \underbrace{L_{2,(1+|x|^2)^m}(\mathbb{R}^n)}_{\subseteq L_2(\mathbb{R}^n)}$$

Dabei gilt stets:

$$\mathcal{F} : L_{2,(1+|x|^2)^m}(\mathbb{R}^n) \rightarrow W_2^m(\mathbb{R}^n)$$

(ohne Beweis).

□

**Beispiel:** Betrachtet sei die verallgemeinerte DGL

$$\Delta E \stackrel{!}{=} \delta_0 \quad , \quad \delta \in S'(\mathbb{R}^3)$$

Diese ist äquivalent zu

$$\underbrace{-\|x\|^2}_{S_\Delta(x)} \cdot \mathcal{F}(E) \stackrel{!}{=} \mathcal{F}(\delta_0) \stackrel{(4.6.5.1)}{=} u_{(2\pi)^{-\frac{3}{2}}}$$

Machen den Ansatz  $\mathcal{F}(E) = u_{\mathcal{F}(\mathcal{E})}$  mit  $\mathcal{E} \in L_{1,loc}$  und erhalten formal:

$$\mathcal{E} = \mathcal{F}^{-1} \left\{ - \left[ (2\pi)^{\frac{3}{2}} \|x\|^2 \right]^{-1} \right\}$$

<sup>12</sup>Die Aussage ist wie folgt zu interpretieren: Ist  $\rho \in L_2$ , so wird die verallgemeinerte DGL  $P(\partial)u \stackrel{!}{=} u_\rho$  gelöst durch  $u := u_f$  für irgendein  $f \in L_2$ .

Wir berechnen:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}(x) &= (2\pi)^{-\frac{3}{2}}(2\pi)^{-\frac{3}{2}}(-1) \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{ix\xi}}{\|\xi\|^2} d\xi = -(2\pi)^{-3} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\|\xi\| \leq R} \frac{e^{ix\xi}}{\|\xi\|^2} d\xi \\
 &= (2\pi)^{-3} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} e^{i\|x\|\rho \cos \vartheta} \frac{\rho^2}{\rho^2} \sin \vartheta d\varphi d\vartheta d\rho \quad \Bigg| \quad \text{Kugelkoordinaten mit } x \text{ als } \xi_z\text{-Achse} \\
 &= (2\pi)^{-2} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \int_{-1}^1 e^{i\|x\|\rho t} dt d\rho \quad \Bigg| \quad t := \cos \vartheta \\
 &= (2\pi)^{-2} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \frac{1}{\|x\|\rho} \underbrace{\left[ e^{i\|x\|\rho} - e^{-i\|x\|\rho} \right]}_{2i \sin \vartheta} d\rho = -\frac{2}{4\pi^2} \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\|x\|} \underbrace{\int_0^R \frac{\sin(\|x\|\rho)}{\rho} d\rho}_{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \frac{-2}{4\pi^2} \cdot \frac{\pi}{2\|x\|}
 \end{aligned}$$

(vgl. umgekehrtes Ergebnis in (4.2.5.1)). Bemerke dass nach 3.1.9 tatsächlich  $u_{\mathcal{E}} \in S'(\mathbb{R}^3)$  ist.

## 6 Faltung und Tensorprodukt

### 6.1 Faltung zwischen Distributionen & Funktionen

#### 6.1.1 Definition: Faltung von Distributionen

Sei  $X := \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  bzw.  $X := \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Zu  $u \in X'$ ,  $\varphi \in X$  definiert man die *Faltung*

$$(u * \varphi)(x) := \langle u, \varphi(x - \cdot) \rangle$$

**Beachte:** Wegen  $\varphi(x - \cdot) \in X$  ist die Definition tatsächlich sinnvoll.

#### Eigenschaften:

(i) Es gilt  $(u * \varphi) \in \mathcal{C}^\infty$ . Dabei ist für Multiindex  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ :

$$\partial^\alpha (u * \varphi) = (\partial^\alpha u) * \varphi = u * (\partial^\alpha \varphi)$$

(ii) Zu  $\varphi \in X$  gilt stets  $(\delta_0 * \varphi) = \varphi$ .

(iii) Es gilt

$$\text{supp}(u * \varphi) \subseteq \text{supp}(u) + \text{supp}(\varphi)$$

#### 6.1.2 Faltung und Differentialgleichungen

Betrachtet sei die DGL

$$P(\partial)f \stackrel{!}{=} \rho, \quad \rho \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad P \in \mathbb{C}^n[X]$$

wobei gegeben sei die sogenannte *Fundamentallösung*  $K \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  der verallgemeinerten DGL:

$$P(\partial)K = \delta_0$$

Dann ist  $f := K * \rho$  eine Lösung der DGL, denn

$$P(\partial)f = P(\partial)(K * \rho) = \underbrace{(P(\partial)K)}_{\delta} * \rho = \rho$$

## 6.2 Faltung von Distributionen untereinander

### 6.2.1 Vorbetrachtung

Gegeben seien die Funktionen  $f, g \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$  so dass auch die Faltung  $f * g$  lokal integrierbar ist. Zu  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  gilt dann

$$\begin{aligned} \langle u_{f*g}, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} (f * g)\varphi(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} g(y)f(x-y)dy \, \varphi(x) \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} g(y)f(x-y)\varphi(x) \, dx \, dy \quad \Bigg| \quad \text{Annahme: Fubini anwendbar} \\ &\stackrel{z:=x-y}{=} \int \int g(y)f(z)\varphi(y+z) \, dz \, dy = \int \int \underbrace{f(x)g(y)}_{(f \otimes g)(x,y)} \cdot \varphi(x+y) \, dx \, dy \end{aligned}$$

Ersichtlich wird: Die allgemeinere Faltung zwischen Distributionen erfordert ein *direktes Produkt*

$$\otimes : \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{2n})$$

Ein weiteres Problem ist die Tatsache dass  $\text{supp}((x, y) \mapsto \varphi(x + y))$  in  $\mathbb{R}^{2n}$  im allgemeinen nicht kompakt ist!

**6.2.2 Definition: Direktes Produkt zwischen Funktionen**

Zu  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{C}$  ist das *direkte Produkt*  $f \otimes g : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{C}$  definiert durch

$$(f \otimes g)(x, y) := f(x) \cdot g(y) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$$

**Bemerkungen:**

- (i) Sind  $f, g \in \mathcal{C}^\infty$ , so ist auch  $f \otimes g \in \mathcal{C}^\infty$ .
- (ii) Es ist  $\text{supp}(f \otimes g) \subseteq \text{supp}(f) \times \text{supp}(g)$ .
- (iii) Die Menge aller endlichen Linearkombinationen

$$\left\{ \sum_{j=1}^N \varphi_j \otimes \psi_j : \varphi_i \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n), \psi_j \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^m), N \in \mathbb{N}_0 \right\} \subseteq \mathfrak{D}(\mathbb{R}^{n+m})$$

liegt dicht in  $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^{n+m})$ . [2]

**6.2.3 Bemerkung zur teilweise Wirkung von Distributionen**

Betrachtet seien die Distribution  $v_y \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^m)$  und die Funktion  $\rho \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^{n+m})$ ,  $\rho : (x, y) \mapsto \rho(x, y)$ . Definieren dazu die Funktion  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  durch

$$\varphi(x) := \langle v_y, \rho(x, \cdot) \rangle \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Dann kann gezeigt werden [2]:

1. Es gilt stets  $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$  mit

$$\partial^\alpha \varphi(x) = \langle v_y, \partial_x^\alpha \rho(x, \cdot) \rangle \quad , \quad \alpha \in \mathbb{N}_0^n, x \in \mathbb{R}^n$$

2. Mit  $\Pi_{\mathbb{R}^n}$  als den Projektor auf  $\mathbb{R}^n$ ,  $\Pi_{\mathbb{R}^n}(x, y) := x$ , gilt

$$\text{supp}(\varphi) \subseteq \Pi_{\mathbb{R}^n}(\text{supp}(\rho))$$

3. Gehen  $\rho_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\mathfrak{D}(\mathbb{R}^{n+m})} \rho$ , dann gehen auch  $\varphi_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)} \varphi$ , das heißt die Vorschrift  $\langle v_y, \cdot \rangle : \mathfrak{D}(\mathbb{R}^{n+m}) \rightarrow \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$  ist stetig.

**6.2.4 Definition: Direktes Produkt zweier Distributionen**

Seien  $u \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^n)$  und  $v \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^m)$  zwei Distributionen. Dann existiert genau eine Distribution  $u \otimes v \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^{n+m})$  (Definition!) mit

$$\langle u \otimes v, \varphi \otimes \psi \rangle = \langle u, \varphi \rangle \cdot \langle v, \psi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n), \psi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^m)$$

bzw.

$$\langle u \otimes v, \rho \rangle = \langle u, \langle v, \rho(x, \cdot) \rangle \rangle = \langle v, \langle u, \rho(\cdot, y) \rangle \rangle \quad \forall \rho \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^{n+m})$$

Man nennt  $u \otimes v$  *direktes Produkt* zwischen  $u$  und  $v$ .

**Bemerke:**

- (i) Eindeutigkeit folgt aus Bemerkung 6.2.2(iii).
- (ii) Das direkte Produkt  $\otimes : \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^n) \times \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^m) \rightarrow \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^{n+m})$  ist assoziativ.
- (iii) Ableitungen  $\partial_x^\alpha$  und  $\partial_y^\beta$  wirken jeweils separat auf die entsprechenden Komponenten, z.B.

$$\partial_x^\alpha (u \otimes v) = (\partial_x^\alpha u) \otimes v$$

Ähnliches gilt auch bei Multiplikation mit  $\mathcal{C}^\infty$ -Funktionen und Koordinatentransformationen.

**Beispiele:**

(a) Zu  $u \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^n)$  und die von 1 erzeugte Distribution  $v_1 \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^m)$  gilt:

$$\langle u \otimes v_1, \rho \rangle = \langle u, \langle v_1, \rho \rangle \rangle = \left\langle u, \int_{\mathbb{R}^m} \rho(x, y) dy \right\rangle, \quad \rho \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^{n+m})$$

Ist ferner  $u = u_f$  erzeugt durch  $f \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$  so ist

$$\langle u_f \otimes v_1, \rho \rangle = \int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(x) \rho(x, y) dy dx$$

(b) Sei  $u \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^n)$  und  $\delta_0 \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^m)$  die Dirac-Distribution. Dann:

$$\langle u \otimes \delta_0, \rho \rangle = \langle u, \langle \delta_0, \rho(x, \cdot) \rangle \rangle = \langle u, \rho(x, 0) \rangle, \quad \rho \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^{n+m})$$

Ist ferner  $u = u_f$  erzeugt durch  $f \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$  so lässt sich schreiben:

$$\langle u_f \otimes \delta_0, \rho \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \rho(x, 0) dx$$

Betrachtet man  $S := \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$  als Hyperfläche in  $\mathbb{R}^{n+m}$  mit  $f : S \rightarrow \mathbb{C}$ , so ist

$$u_f \otimes \delta_0 = \delta_S$$

(vgl. 3.1.12(i)).

(c) Direkte Produkte von Distributionen spielen eine wichtige Rolle in der Formulierung von *Anfangswertproblemen* bei verallgemeinerten Differentialgleichungen. Als Beispiel sei betrachtet die klassische Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = f(x, t), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

als Anfangswertproblem

$$U(x, 0) = U_0(x), \quad \frac{\partial U}{\partial t}(x, 0) = U_1(x)$$

In der Sprache der Distributionen erhält diese folgende Form:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = F + U_1 \otimes \delta_{t=0} U_0 \otimes \delta'_{t=0}$$

bei gegebener Distribution  $F$  mit  $\text{supp}(F) \subset \mathbb{R} \times [0, \infty)$ . Gesucht ist dabei Distribution  $U$  mit  $\text{supp}(U) \subseteq \mathbb{R} \times [0, \infty)$ .

**6.2.5 Lemma über den Träger von direkten Produkten**

Seien  $u, v \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^n)$  und  $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$ . Dann gilt:

$$\text{supp} [((x, y) \mapsto \varphi(x + y)) \cdot (u \otimes v)] \subseteq \{(x, y) : x \in \text{supp}(u), y \in \text{supp}(v), x + y \in \text{supp}(\varphi)\}$$

**6.2.6 Hilfsdefinition zur Faltung**

Sei  $\eta \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ , so dass  $\eta|_{B_1(0)} = 1$  und  $\eta(x, y) = \eta(y, x)$ , dazu

$$\eta_k(x, y) := \eta\left(\frac{x}{k}, \frac{y}{k}\right), \quad x, y \in \mathbb{R}^n, \quad k \in \mathbb{N}$$

Dann ist insbesondere  $\eta_k|_{B_k(0)} = 1$ .

### 6.2.7 Definition: Faltung zweier Distributionen

Seien  $u, v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  so dass für jedes  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  die Menge

$$\Omega_\varphi := \{(x, y) : x \in \text{supp}(u), y \in \text{supp}(v), x + y \in \text{supp}(\varphi)\} \quad (\clubsuit)$$

beschränkt ist (*Faltbarkeitsbedingung*). Dann existiert der Grenzwert

$$\langle (u * v), \varphi \rangle := \lim_{k \rightarrow \infty} \left\langle u \otimes v, \underbrace{((x, y) \mapsto \eta_k(x, y) \cdot \varphi(x + y))}_{\in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n})} \right\rangle$$

für alle  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  und gehört zu  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ . Die so definierte Distribution  $u * v$  heißt *Faltung* von  $u$  und  $v$ .

#### Bemerkungen:

- (i) Im Allgemeinen ist  $\varphi_+ := ((x, y) \mapsto \varphi(x + y)) \notin \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n})$ .
- (ii) Da  $\Omega_\varphi$  beschränkt ist, besitzt  $\varphi_+ \cdot (u \otimes v) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  einen kompakten Träger, kann also fortgesetzt werden auf ganz  $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ . Daher ist im Prinzip

$$\langle u * v, \varphi \rangle = \langle \varphi_+ \cdot (u \otimes v), 1 \rangle \quad (\spadesuit)$$

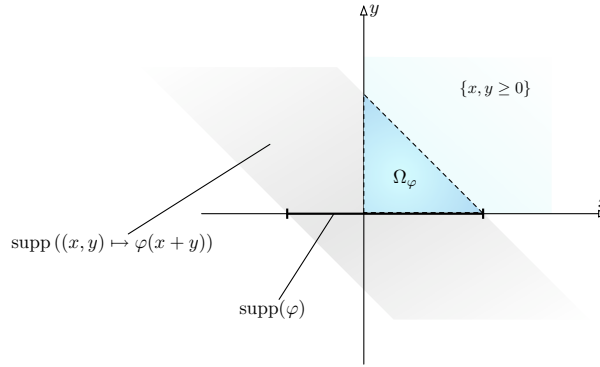
**Alternativ:** Aufgrund der Beschränktheit von  $\Omega_\varphi$ , existiert stets ein  $k_0 \in \mathbb{N}$  so dass  $\eta_k|_{\Omega_\varphi} = 1 \quad \forall k \geq k_0$ . Daher ist

$$\langle u * v, \varphi \rangle \stackrel{(4.1.4)}{=} \underbrace{\langle u \otimes v, \eta_{k_0} \cdot \varphi_+ \rangle}_{\langle \varphi_+ \cdot (u \otimes v), \eta_{k_0} \rangle}$$

was genau Darstellung  $(\spadesuit)$  entspricht.

(iii) Bedingung  $(\clubsuit)$  gilt z.B. in den Fällen:

- $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), v \in \mathcal{C}'(\mathbb{R}^n)$  bzw.  $u \in \mathcal{C}'(\mathbb{R}^n), v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$
- $u, v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  mit  $\text{supp}(u), \text{supp}(v) \subseteq \{x : x^j \geq 0, j = 1, \dots, n\}$



**Abbildung 5:** Hinreichende Bedingung zur Existenz der Faltung für  $u, v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ : Beide Träger liegen in der positiven Halbachse.

### 6.2.8 Eigenschaften der Faltung

Seien  $u, v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  mit der Faltbarkeitsbedingung in 6.2.7 erfüllt. Dann gilt:

1.  $u * v = v * u$
2.  $\partial^\alpha (u * v) = (\partial^\alpha u) * v = u * (\partial^\alpha v)$  für Multiindex  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$
3.  $u * \delta_0 = u$

**6.2.9 Bemerkung zur Kompatibilität der Faltung**

Sind  $f, g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , dazu die erzeugten Distributionen  $u_f, u_g \in \mathcal{C}'(\mathbb{R}^n)$ , so entspricht die Faltung  $u_f * u_g$  genau der Faltung  $f * g$ , das heißt

$$u_{f*g} = u_f * u_g$$

**Erläuterung:** Für Testfunktion  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  ist

$$\begin{aligned} \langle u_f * u_g, \varphi \rangle &\stackrel{\substack{k_0 \\ \text{gro\ss} \\ \text{gen\ug}}}{=} \langle (u_f \otimes u_g), \eta_{k_0} \varphi_+ \rangle = \langle u_f, \langle u_g, \eta_{k_0}(x, \cdot) \varphi(x + \cdot) \rangle \rangle \\ &= \int f(x) \int g(y) \varphi(x + y) \eta_{k_0}(x, y) dy dx = \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g(y) \varphi(x + y) dx dy}_{\text{vgl. Ausdruck in 6.2.1}} \\ &= \langle u_{f*g}, \varphi \rangle \end{aligned}$$



## A Anhang

### A.0.10 Hilfssatz zur Fortsetzungen von Operatoren

Sei  $E$  ein Banachraum und  $U \subseteq E$  dicht in  $E$ . Sei  $T : U \rightarrow U$  ein stetiger, linearer Operator. Dann gilt:

1.  $T$  kann eindeutig zum einem stetigen, linearen Operator  $T : E \rightarrow E$  fortgesetzt werden.
2. Ist  $T : U \rightarrow U$  bijektiv, so ist es auch die Fortsetzung.
3. Ist  $T : U \rightarrow U$  isometrisch, so ist es auch die Fortsetzung.

**Beweis:**

1. Zu vorgegebenem Element  $x \in E$  existieren  $u_1, u_2, \dots \in U$  so dass  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ . Wegen

$$\|T(u_n) - T(u_m)\| = \|T(u_n - u_m)\| \leq \|T\| \cdot \underbrace{\|u_n - u_m\|}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

ist  $T(u_n)$  eine Cauchyfolge, die wegen der Vollständigkeit von  $E$  einen Grenzwert  $y \in E$  besitzt. Setzen nun

$$T(x) := y = \lim_{n \rightarrow \infty} T(u_n)$$

Diese Zuordnung ist tatsächlich wohldefiniert und stetig, denn für  $v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$  geht

$$\|T(v_n) - T(u_n)\| = \|T(v_n - u_n)\| \leq \|T\| \cdot \underbrace{\|v_n - u_n\|}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

das heißt  $\lim_{n \rightarrow \infty} T(v_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(u_n) = T(x)$ . Die Eindeutigkeit der Fortsetzung folgt aus der Dichtheit von  $U \subseteq E$  und der Stetigkeit von  $T$ . Linearität ist klar.

2. Zu vorgegebenem  $y \in E$  existiert eine Folge  $(u_n) \subseteq U$  mit  $T(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$ . Da auch  $T^{-1}$  beschränkt ist (da  $E$  Banach) ist  $(u_n) = (T^{-1}(T(u_n)))$  Cauchy und besitzt somit einen Grenzwert  $x \in E$ . Per Konstruktion der Fortsetzung ist dann

$$T(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} T(u_n) = y$$

3. Isometrie folgt aus Stetigkeit der Norm.

□

### A.0.11 Definition: Sobolev-Raum

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $k \in \mathbb{N}$  und  $1 \leq p \leq \infty$ . Dann heißt der Raum aller Funktionen  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ , deren Ableitungen  $\partial^\alpha f$ ,  $|\alpha| \leq k$  sowohl in  $L_{1,\text{loc}}(\Omega)$  als auch in  $L_p(\Omega)$  liegen, *Sobolev Raum*  $W_p^k(\Omega)$ . Dabei ist  $W_p^k(\Omega)$  ausgestattet mit der Norm

$$\|f\|_{W_p^k} := \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha f\|_{L_p(\Omega)} \quad , \quad f \in W_p^k$$

ein Banachraum. Für  $p < \infty$  ist  $W_p^k(\Omega)$  sogar separabel.

### A.0.12 Definition: Gewichteter $L_p$ -Raum

Sei  $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$  ein Maßraum und  $g : \Omega \rightarrow [0, \infty)$  messbar. Dann definiert man den *gewichteten  $L_p$ -Raum*

$$L_{p,g}(\Omega, \mathfrak{S}, \mu) := L_p(\Omega, \mathfrak{S}, \nu) \quad , \quad \frac{d\nu}{d\mu} := g$$

als den Raum aller  $p$ -integrablen Funktionen bzgl. des Maßes  $\nu \ll \mu$ . Das heißt:

$$L_{p,g}(\Omega, \mathfrak{S}, \mu) := \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \text{ messbar} \mid \underbrace{\int_{\Omega} |f|^p \cdot g \, d\mu}_{\|f\|_{L_{p,g}}^p} < \infty \right\} / \ker \left( \|\cdot\|_{L_{p,g}} \right)$$

**Bemerke:**

- (i) Ist  $g > 0$   $\mu$ -fast überall, so stimmen die Äquivalenzklassen in  $L_{p,q}$  mit denen in  $L_p$  überein, sind andernfalls jedoch größer.
- (ii) Ist  $g \geq C > 0$   $\mu$ -fast überall für irgendeine Konstante  $C$ , so gilt  $\|f\|_{L_p} \leq \text{const} \cdot \|f\|_{L_{p,g}}$ ,  $f \in L_{p,g}$ , das heißt insbesondere

$$L_{p,g} \hookrightarrow L_p$$

## B Symbol-Referenz

$\mathbb{R}_+ := [0, \infty) \subset \mathbb{R}$ .

$\mathbb{Q}_+ := \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{Q}$ .

$\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

$\mathbb{C}^* := \mathbb{R}^* + i\mathbb{R}^*$

$z^*$ : Komplex-Konjugierte von  $z \in \mathbb{C}$ .

$\mathbb{K}^n[X]$ : Für Körper  $\mathbb{K}$ , der Raum aller Polynome auf  $\mathbb{K}^n$ .

$1_A$ : Indikatorfunktion für Menge  $A$ .

$\mathcal{P}(M)$ : Potenzmenge von  $M$ .

$(T, \mathcal{O}(T))$ : Topologischer Raum mit Topologie  $\mathcal{O}(T)$ .

$\mathcal{B}(T)$ : Borel- $\sigma$ -Algebra von  $T$ .

$(M, \mathcal{M}, \mu)$ : Maßraum über Grundmenge  $M$ , mit  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{M}$  und Maß  $\mu$ .

(mod0): Bis auf Nullmengen,  $f = g(\text{mod}0) \Leftrightarrow \mu(\{f \neq g\}) = 0$ .

$X'$ : Für linearen Raum  $X$  mit Konvergenzbegriff: Raum aller stetigen, linearen Funktionale auf  $X$ .

$L_p(M)$ : Funktionenraum der  $p$ -integrierbaren, komplexwertigen Funktionen im Maßraum  $(M, \mathcal{M}, \mu)$ .

$L_{p,\text{loc}}(\Omega)$ : Raum lokal- $p$ -integrierbarer Funktionen auf  $\Omega$ , siehe Def. 3.1.6.

$L_{p,\text{com}}(\Omega)$ : Raum  $p$ -integrierbarer Funktionen mit kompaktem Träger auf  $\Omega$ , siehe Def. 3.3.2.

$L_{p,g}(\Omega)$ : Mit Gewichtsfunktion  $g$  gewichteter  $L_p$  Raum. Siehe A.0.12.

$W_p^k(\Omega)$ : Sobolev-Raum über  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ . Siehe A.0.11.

$\bar{A}$ : Für Untermenge  $A \subset X$  eines topologischen Raumes  $X$ : Abschluss  $\text{cl}(A) = \bar{A}$  von  $A$ .

$B_r(x)$ : Abgeschlossene Kugel um  $x$  mit Radius  $r$ .

$B_r^o(x)$ : Offene Kugel um  $x$  mit Radius  $r$ .

$B_1^n$ : Abgeschlossene  $n$ -dimensionale Einheitskugel:  $B_1^n := B_1(0)$ .

$A_\varepsilon$ : Für Untermenge  $A \subset X$  eines metrischen Raumes  $X$  und  $\varepsilon \geq 0$ :  $A_\varepsilon := \bigcup_{x \in A} B_\varepsilon(x)$ .

$\Omega^c$ : Komplement der Untermenge  $\Omega \subset X$ ,  $\Omega^c := X \setminus \Omega$ .

$\bar{\Omega}$ ,  $\text{cl}(\Omega)$ : Abschluss von  $\Omega \subset T$  im topologischen Raum  $T$ .

$\text{cl}_Y(\Omega)$ : Abschluss von  $\Omega \subset Y$  in Untermenge  $Y \subset T$  des topologischen Raumes  $T$ ,  $\text{cl}_Y(\Omega) := \bigcap_{\substack{A \text{ abgeschl. in } Y \\ \Omega \subset A}} A$ .

$d(A, B)$ : Für Untermengen  $A, B \subset X$  eines metrischen Raumes:  $d(A, B) := \inf \{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$ .

$d(x, A)$ : Für Untermenge  $A \subset X$  eines metrischen Raumes und  $x \in X$ :  $d(x, A) := d(\{x\}, A)$ .

$S^n$ :  $n$ -dimensionaler Einheits-Kugelrand in  $\mathbb{R}^{n+1}$ :  $S^n = \partial B_1^{n+1}$ .

$S(\mathbb{R}^n)$ : Schwartz-Raum, siehe Def. 2.3.2.

$\|\cdot\|_{k,l}$ : Siehe Def. 2.3.2.

$\langle x \rangle$ : Siehe Notationen 2.3.1.

$D^\alpha \varphi$ : Für reelle Funktion  $\varphi$ , siehe Notationen 2.3.1.

$D^\alpha u$ : Für Distribution  $u$ , siehe Def. 4.2.2.

$u_f$ : Reguläre Distribution erzeugt durch Funktion  $f \in L_{1,\text{loc}}$  bzw.  $f \in L_{1,\text{com}}$ .

$\mathcal{F}$ : Fouriertransformation.

$\text{supp}(f) := \text{cl}\{x \in X : f(x) \neq 0\}$  : Träger von  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ .

$\mathcal{C}^p(\Omega)$ : Raum aller komplexen, auf  $\Omega$   $p$ -mal stetig differenzierbaren Funktionen.

$\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ : Raum aller komplexen, auf  $\Omega$  glatten Funktionen.

$\mathcal{C}(\Omega) :: \mathcal{C}^\infty(\Omega)$  ausgestattet mit Konvergenzbegriff (2.3.6).

$\mathcal{C}_0^\infty(\Omega) := \{f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) : \text{supp}(f) \subset \Omega \wedge \text{supp}(f) \text{ kompakt}\}$ .

$\mathfrak{D}(\Omega)$ :  $\mathcal{C}_0^\infty$  ausgestattet mit Konvergenzbegriff 2.3.7.

$\|\cdot\|_{\overline{\Omega},k}$ : Siehe 2.3.6.

$\omega_h$ : Siehe 2.4.1.1.

$f * g$ : Faltung von  $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ :  $(f * g)(x) := \int_{\Omega} f(y)g(x-y) dy$ .

$\delta_{x_0}$ :  $\delta$ -Distribution auf  $\mathfrak{D}(\Omega)$  (3.1.12).

$\mathcal{P}_{\frac{1}{x}}$ : Cauchyscher-Hauptwert (3.1.14).

$e_j$ : Standard-Einheitsvektor in  $\mathbb{R}^n$ ,  $e_j = (0, \dots, 0, \underset{j}{\underset{\uparrow}{1}}, 0, \dots, 0)$ .

$\Theta$ : Heavisidesche Sprungfunktion, siehe 4.2.4.1.

$f^+$ : Für Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  der positive Anteil:  $f^+ := \max\{f, 0\}$ .

$f^-$ : Für Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  der negative Anteil:  $f^- := \max\{-f, 0\}$ .

$P(\partial)$ : Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten. Siehe 5.0.11.

$\mathcal{S}_P$ : Symbol des Differentialoperators  $P[\partial]$ . Siehe 5.0.12.

$f \otimes g$ : Direktes Produkt zwischen den Funktionen  $f, g$ . Siehe 6.2.2.

$u \otimes v$ : Direktes Produkt zwischen den Distributionen  $u, v \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^n)$ . Siehe 6.2.4.

$u * v$ : Faltung der Distributionen  $u, v \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^n)$ . Siehe 6.2.7.

## Literatur

- [1] *Distributions, Sobolev Spaces, Elliptic Equations*, D.D. Haroske, H. Triebel  
EMS Textbooks in Mathematics, 2007
- [2] *Theoretical and mathematical Physics*, V.S. Vladimirov, E.F. Mishchenko, A.K. Gushchin  
AMS Bookstore, 1988

# Index

- Ausschöpfungsfolge, 6, 7
- Breit-Wigner, 27
- Cauchyscher Hauptwert, 24
- Dicht, 14
- Differentialgleichung, 57, 58
  - hyperbolische, 42
  - parabolische, 42
  - verallgemeinerte, 57, 62
- Differentialoperator, 5, 57
- Dirac
  - Kamm, 38
- Direktes Produkt
  - zwischen Distributionen, 61
  - zwischen Funktionen, 61
- Distribution, 19
  - Dirac, 23, 24, 38, 43, 52, 62
  - Reguläre, 21, 26, 30
  - Singuläre, 21
- Distributionsableitung, 35
- Einbettung, 13
- Einschränkung
  - einer Distribution, 31
- Faltbarkeitsbedingung, 63
- Faltung, 60
  - von Funktionen, 60, 64
  - zwischen Distributionen, 63
- Faltungssatz, 50
- Folgenstetig, 19
- Fortsetzung
  - einer Distribution, 29
- Fouriertransformation
  - von Distributionen, 51
  - von Funktionen, 46
- Frechet-Raum, 10, 12
- Fundamentallösung, 40, 60
- Integralkern, 39, 40
- Isometrie, 50
- Konvergenz
  - Glatte Funktionen, 11
  - regulärer Distributionen, 22
  - Schwache, 19
  - Schwarzraum, 10
- Koordinatentransformation, 42
- Laplace
  - Gleichung, 42
  - Integralkern, 39
  - Operator, 39, 57, 58
- Lokal-integrierbar, 20
- Maß
  - Reguläres, 24
- Ordnung
  - einer Distribution, 31
- Präkompakt, 9
- Produkt
  - zwischen Distribution und Funktion, 33
  - zwischen Distributionen, 44
- Punktspektrum, 43
- Schwarzraum, 10
- Sobolev Raum, 65
- Sochozki, 27
- Symbol, 57, 58
- Topologie, 7
  - Schnitttopologie, 7
- Total beschränkt, 9
- Träger
  - einer Distribution, 28, 29, 31
  - einer Funktion, 28, 30
  - Singulärer, 29
  - von Distributionsprodukten, 33
- Wellengleichung, 40, 62
- Zerlegung der Einheit, 18