Atom & Molekülphysik

FSU Jena - WS 2008/2009
Serie 07 - Lösungen

Stilianos Louca

17. Dezember 2008

Aufgabe 01

a) Betrachten ein Ensemble von N Atomen, die Stöße alle in der Frequenz ω_0 schwingen würden. Die Anzahl der Atome die am Zeitpunkt t aufgrund eines Stoßes nicht mehr schwingen ist gegeben durch

$$\mathcal{N}(t) := \int_0^t P(t)\ dt$$

so dass sich die zum Zeitpunkt t makroskopisch gemessene Strahlungsleistung ergibt durch

$$I(t) = I_0\left[1 - \mathcal{N}(t)\right] = I_0 - I_0\gamma \int_0^t e^{-\gamma t}\ dt = I_0 e^{-\gamma t}$$

das heißt das netto-Feld ergibt sich effektiv als

$$E(t) = E_0 e^{i\omega_0 t} e^{-\gamma t/2}$$

Dessen Spektrum ist (mit $E(t) = 0, t < 0$) gegeben durch

$$\tilde{E}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-i\omega t} E(t)\ dt = \frac{E_0}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{i(\omega_0 - \omega)t - \gamma t/2} dt = \frac{E_0}{\sqrt{2\pi}\left[i(\omega_0 - \omega) - \frac{\gamma}{2}\right]}$$

bzw. die spektrale Intensität durch

$$I(\omega) = \frac{I_0}{2\pi} \left| \frac{1}{i(\omega_0 - \omega) - \frac{\gamma}{2}} \right|^2 = \frac{I_0}{2\pi\left[(\omega_0 - \omega)^2 + \frac{\gamma^2}{4}\right]}$$

was genau einem Lorentz-Profil entspricht.

b) Die (natürliche) Lebensdauer $\tau = 0.39$ ms entspricht einer Linienbreite

$$\delta\nu \approx \frac{1}{2\pi\tau} \approx 4.08 \times 10^2 \text{ Hz} \ll 3 \times 10^3 \text{ Hz}$$

Durch Begrenzung der Anregungszeit T kann eine weitere Verbreiterung erreicht werden. Im klassischen Bild wäre die Dipol-Schwingung der Elektronen näherungsweise beschrieben durch den Verlauf

$$E(t) = \begin{cases} E_0 e^{i\omega_0 t} & : 0 \le t \le T \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

mit dem Spektrum

$$\tilde{E}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^T E_0 e^{i(\omega_0 - \omega)t} dt = \frac{E_0}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{i(\omega_0 - \omega)T} - 1}{i(\omega_0 - \omega)}$$

bzw. der spektralen Intensität

$$I(\omega) = \frac{I_0}{2\pi}\left|\frac{e^{i(\omega_0-\omega)T}-1}{i(\omega_0-\omega)}\right|^2 = \frac{2I_0}{\pi}\cdot\frac{\sin^2\left[\frac{(\omega_0-\omega)}{2}T\right]}{(\omega_0-\omega)^2}$$

Die volle Halbwertsbreite (FWHM) $2\delta_\omega$ ergibt sich durch die Forderung

$$I\left(\omega_0+\delta_\omega\right) \stackrel{!}{=} \frac{I_{\max}}{2} = \frac{I_0 T^2}{4\pi}$$

Durch Entwicklung des sin bis zur 6. Ordnung erhält man für $|\delta_\omega| \ll 1$

$$\left[\frac{1}{2}-\frac{(\delta_\omega T)^2}{48}+\frac{(\delta_\omega T)^4}{2^5\cdot 5!}\right]^2 \stackrel{!}{=} \frac{1}{8} \quad\Rightarrow\quad (\delta_\omega T)^2 = 40-8\sqrt{25-30\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$

wobei die 2. Lösung entfällt (Taylor-Artefakt), und somit

$$\delta_\omega = \pm\frac{1}{T}\sqrt{40-8\sqrt{25-30\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}}$$

bzw.

$$\boxed{2\delta_\nu \approx \frac{0.8883}{T}} \tag{1}$$

Für eine Linienbreite von $2\delta_\nu = 3$ kHz ist somit eine Wechselwirkungszeit von

$$T_{3\ \mathrm{kHz}} \approx 2.961\times 10^{-4}\ \mathrm{s}$$

erfordert. Unter Annahme einer Maxwell-Boltzmann Verteilungsdichte für die Geschwindigkeitsnorm

$$\frac{dP}{dv^3}(\|v\|) = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\|v\|^2\cdot\exp\left[-\frac{m\,\|v\|^2}{2k_B T}\right]$$

mit der Teilchenmasse $m \approx 6.655\times 10^{-26}$ Kg ist der Erwartungswert $\overline{\|v\|}$ gegeben durch

$$\overline{\|v\|} = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}}$$

so dass sich eine Wechselwirkungszonen-Länge von

$$L_{3\ \mathrm{kHz}} \approx T_{3\ \mathrm{kHz}}\cdot\overline{\|v\|} \approx 0.204\ \mathrm{m}$$

ergibt.

Variante

Eine alternative Linienbreite ergäbe sich über die Zeit-Energie Unschärferelation der erregten Zustände

$$\Delta\nu = \frac{1}{2\pi T}$$

wodurch man für $\Delta\nu \stackrel{!}{=} 3$ kHz auf $T_{3\ \mathrm{kHz}} \approx 53\ \mu$s und $L_{3\ \mathrm{kHz}} \approx 3.6\times 10^{-2}$ m kommt.

Aufgabe 02

a) Beginnen mit dem Übergangsdipolmoment $M_{n_1l_1m_1n_2l_2m_2}$ zwischen zwei Zuständen $\Psi_{n_1l_1m_1}, \Psi_{n_2l_2m_2}$:

$$M_{n_1l_1m_1n_2l_2m_2} := e \int\limits_{\mathbb{R}^3} \Psi^*_{n_1l_1m_1} \vec{r}\, \Psi_{n_2l_2m_2}\ d^3x$$

$$= e \underbrace{\int\limits_0^\infty R^*_{n_1l_1}(r) R_{n_2l_2}(r) r^3\ dr}_{\Omega_{n_1l_1n_2l_2}} \cdot \int\limits_0^\pi N_{l_1m_1} N_{l_2m_2} \cdot P_{l_1}^{m_1}(\cos\vartheta) P_{l_2}^{m_2}(\cos\vartheta) \sin\vartheta \begin{bmatrix} \sin\vartheta \\ \sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{bmatrix} d\vartheta \otimes \underbrace{\int\limits_0^{2\pi} e^{i(m_2-m_1)\varphi} \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 1 \end{bmatrix} d\varphi}_{\pi \begin{bmatrix} \delta_{|m_2-m_1|,1} \\ i\delta_{m_2-m_1,1} - i\delta_{m_2-m_1,-1} \\ 2\delta_{m_1,m_2} \end{bmatrix}}$$

$$N_{l,m} := \sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} \quad , \quad {''}\otimes{''} : \text{Komponentenweise Multiplikation}$$

Speziell mit

$$\Psi_{100}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{\pi} a_0^{\frac{3}{2}}} e^{-r/a_0}$$

$$\Psi_{200}(\vec{r}) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi} a_0^{\frac{3}{2}}} \left[2 - \frac{r}{a_0}\right] e^{-r/2a_0}$$

$$\Psi_{310}(\vec{r}) = \frac{\sqrt{2}}{81\sqrt{\pi} a_0^{\frac{3}{2}}} \left[6 - \frac{r}{a_0}\right] \frac{r}{a_0} e^{-r/3a_0} \cos\vartheta e^{im\varphi}$$

$$\Psi_{31m}(\vec{r}) \overset{m\neq 0}{=} \frac{1}{81\sqrt{\pi} a_0^{\frac{3}{2}}} \left[6 - \frac{r}{a_0}\right] \frac{r}{a_0} e^{-r/3a_0} \sin\vartheta e^{im\varphi}$$

ist

$$M_{100,310} = \frac{e\sqrt{2}}{81a_0^4} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \otimes \underbrace{\int_0^\infty \left[6r - \frac{r^2}{a_0}\right] e^{-\frac{4r}{3a_0}} r^3 \; dr}_{\frac{3^8}{2\cdot 4^4} a_0^5} \otimes \underbrace{\int_0^\pi \sin\vartheta \cos\vartheta \begin{bmatrix} \sin\vartheta \\ \sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{bmatrix} \; d\vartheta}_{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2/3 \end{bmatrix}} = \frac{3^3 e a_0}{4^3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{100,31m} \overset{m\neq 0}{=} \frac{e}{81a_0^4} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ i\,\mathrm{sgn}(m) \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \underbrace{\int_0^\infty \left[6r - \frac{r^2}{a_0}\right] e^{-\frac{4r}{3a_0}} r^3 \; dr}_{\frac{3^8}{2\cdot 4^4} a_0^5} \otimes \underbrace{\int_0^\pi \sin^2\vartheta \begin{bmatrix} \sin\vartheta \\ \sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{bmatrix} \; d\vartheta}_{\begin{bmatrix} 4/3 \\ 4/3 \\ 0 \end{bmatrix}} = \frac{3^3 e a_0}{2\cdot 4^3} \begin{bmatrix} 1 \\ i\,\mathrm{sgn}(m) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{200,310} = \frac{e}{4\cdot 81\cdot a_0^4} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \otimes \underbrace{\int_0^\infty \left[\frac{r^3}{a_0^2} - 8\frac{r^2}{a_0} + 12r\right] e^{-\frac{5r}{6a_0}} r^3 \; dr}_{\frac{6718464\cdot a_0^5}{5^6}} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2/3 \end{bmatrix} = \frac{27648\cdot e a_0}{5^6} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{200,31m} \overset{m\neq 0}{=} \frac{e}{4\cdot 81\cdot a_0^4\sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ i\,\mathrm{sgn}(m) \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \underbrace{\int_0^\infty \left[\frac{r^3}{a_0^2} - 8\frac{r^2}{a_0} + 12r\right] e^{-\frac{5r}{6a_0}} r^3 \; dr}_{\frac{6718464\cdot a_0^5}{5^6}} \otimes \underbrace{\int_0^\pi \sin^2\vartheta \begin{bmatrix} \sin\vartheta \\ \sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{bmatrix} \; d\vartheta}_{\begin{bmatrix} 4/3 \\ 4/3 \\ 0 \end{bmatrix}} = \frac{27648\cdot e a_0}{5^6\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i\,\mathrm{sgn}(m) \\ 0 \end{bmatrix}$$

bzw.

$$|M_{100,310}|^2 = \frac{3^6 e^2 a_0^2}{8192} \approx 6.3968\times 10^{-60}\ \mathrm{C^2m^2}\ ,\ |M_{100,31m}|^2 \overset{m\neq 0}{=} \frac{3^6 e^2 a_0^2}{8192} \approx 6.3968\times 10^{-60}\ \mathrm{C^2m^2}$$

$$|M_{200,310}|^2 = \frac{27648^2 e^2 a_0^2}{5^{12}} \approx 2.2507\times 10^{-58}\ \mathrm{C^2m^2}\ ,\ |M_{200,31m}|^2 \overset{m\neq 0}{=} \frac{27648^2 e^2 a_0^2}{2\cdot 5^{12}} \approx 2.2507\times 10^{-58}\ \mathrm{C^2m^2}$$

Die Einsteinkoeffizienten der spontanen Emission von 3p auf 1s bzw. 2s sind gegeben durch

$$A_{ik} = \frac{16}{3} \cdot \frac{\pi^3 (h\nu_{ik})^3}{\varepsilon_0 c^3 h^4} \cdot |M_{ik}|^2$$

$$A_{310,100} \approx 1.6707\times 10^8\ \mathrm{s^{-1}}$$

$$A_{31m,100} \overset{m\neq 0}{\approx} 1.6707\times 10^8\ \mathrm{s^{-1}}$$

$$A_{200,310} \approx 2.2424\times 10^7\ \mathrm{s^{-1}}$$

$$A_{200,31m} \overset{m\neq 0}{\approx} 2.2424\times 10^7\ \mathrm{s^{-1}}$$

Der effektive Einstein-Koeffizient dieser Emission ergibt sich, unter Annahme einer Gleichverteilung der jeweiligen magnetischen Quantenzahlen, gemäß

$$A_{3p\to 1s,2s} = \frac{1}{3}\Big[A_{310,100} + A_{31,-1,100} + A_{311,100} + A_{310,200} + A_{31,-1,200} + A_{311,200}\Big] \approx 1.8949 \times 10^8 \text{ s}^{-1}$$

Dementsprechende ergibt sich, ohne induzierter Emission, die mittlere Lebensdauer im Zustand 3p als

$$\tau_{3p} = \frac{1}{A_{3p\to 1s,2s}} \approx 5.2772 \times 10^{-9} \text{ s}$$

Die entsprechenden Oszillatorstärken sind gegeben durch

$$f_{ik} = \frac{8\pi^2}{3} \cdot \frac{m}{h^2 e^2} \cdot (h\nu_{ik}) \cdot |M_{ik}|^2$$

$$f_{100,310} \approx 2.6352 \times 10^{-2}$$

$$f_{100,31m} \overset{m\neq 0}{\approx} 2.6352 \times 10^{-2}$$

$$f_{200,310} \approx 1.4487 \times 10^{-1}$$

$$f_{200,31m} \overset{m\neq 0}{\approx} 1.4487 \times 10^{-1}$$

Sie sind ein Maß für die Response/Transitionsdipolstrahlung des Oszillators (elektrischen Dipols) zu einem, mit Resonanzfrequenz ω_{ik} anregenden, elektrischen Feld.
Bemerkung: Ein freies Elektron hat Definitionsgemäß die Oszillatorstärke 1.

Aufgabe 03

a) Durch Vergleich des Planckschen Strahlungsgesetzes mit der Boltzman-Energieverteilung ergibt sich der Zusammenhang

$$A_{ik} = \frac{8\pi h}{c^3} \cdot \nu^3 \cdot B_{ik}$$

zwischen den Einstein-Koeffizienten A_{ik} und B_{ik} des spontanen bzw. induzierten Überganges zwischen Zuständen $|i\rangle$ und $|k\rangle$. Zu erkennen ist, dass für höhere Übergangs-Frequenzen ν sehr schnell die spontane Emission dominiert, was eine effektive Besetzungsinversion bzw. kontrolliertes Puls-Auslösen im LASER äußerst schwierig macht.

Eine weitere Hürde bei Röntgen-LASERn ist das Erstellen von Spiegelsystemen, da der Brechungsindex von Röntgenstrahlung bei den meisten dielektrischen Medien gegen 1 geht.

b) Aufgrund der geringeren Teilchendichte ist die stoßinduzierte Rate bei Gasen viel kleiner als bei Festkörper-LASERN. Um eine effektive Verstärkung in möglichst wenig Umläufen zu erzielen, sind bei Gas-LASERn längere Resonatoren bzw. ein längeres aktives Medium erwünscht.