Atom & Molekülphysik

FSU Jena - WS 2008/2009
Serie 05 - Lösungen

Stilianos Louca

8. August 2010

Aufgabe 01

Da es sich um ein schwaches Magnetfeld handelt, liegt hier genau der (anormale) *Zeeman-Effekt* vor. Dabei erfährt das äußere Elektron durch das Magnetfeld $\mathbf{B} = B\vec{e}_z$ die energetische Erhebung

$$V_{l,s,j,m_j} = -\left(\vec{\mu}_j\right)_j \cdot \mathbf{B} = -\left(\vec{\mu}_j\right)_{j,z} B$$

mit der J- und darauf folgende z-Projektion des magnetischen Moments

$$\left(\vec{\mu}_j\right)_{j,z} = m_j g_j \mu_B$$

und dem Lande-Faktor

$$g_j = 1 + \frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)}$$

Für gegebene l, s, j ist also der energetische Unterschied zwischen zwei aufeinanderfolgenden Zuständen $m_j, m_j + 1$ gegeben durch

$$\Delta E^{l,s,j}_{m_j,m_j+1} = \left[1 + \frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)}\right] \cdot \mu_B B \ , \ m_j = -j, ..., j \tag{1}$$

Speziell für unseren Fall ergeben sich die in Tabelle 1 aufgelisteten Werte.

$\mathbf{n^{2s+1}L_j}$	$\Delta^{l,s,j}_{m_j,m_j+1}$ $[\mu_\mathrm{B}\mathrm{B}]$
$4^2S_{\frac{1}{2}}$	2
$4^2P_{\frac{1}{2}}$	2/3
$4^2P_{\frac{3}{2}}$	4/3

Tabelle 1: Zur Aufspaltungsenergie

Unter Berücksichtigung der Auswahlregeln

$$\Delta l = \pm 1, \ \Delta m_l = 0, \pm 1, \ \Delta j = 0, \pm 1, \ \Delta m_j = 0, \pm 1$$

sei in Abbildung 1 das entsprechende Termschema und den erlaubten Übergängen gegeben.

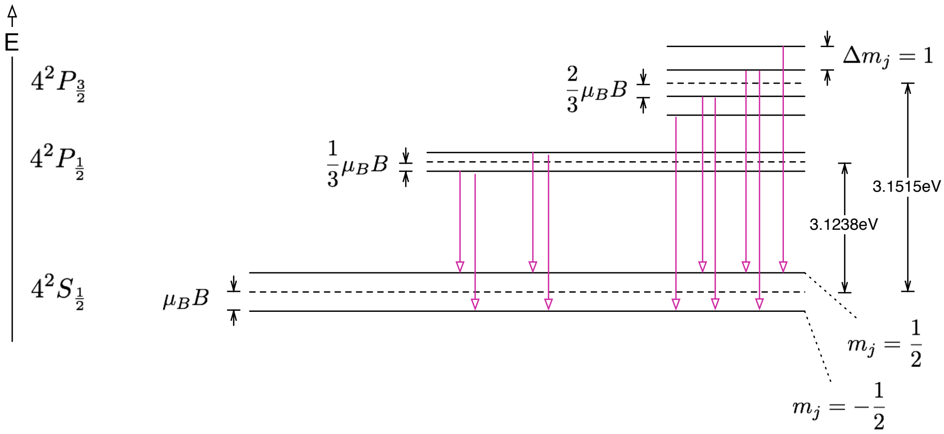

Abbildung 1: Termschema des Ca^+-Ions. Gestrichelte Linien sind nicht mehr vorhanden!

Aufgabe 02

Betrachten wir ein 2-Zustandsspin-System in einem **B** Feld ($\mathbf{B} = B_0\vec{e}_z$) so führen die Vektoren der Spin-Erwartungswerte

$$\overline{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} \overline{s}_x \\ \overline{s}_y \\ \overline{s}_z \end{pmatrix}$$

um die z-Achse eine Präzessionsbewegung mit der so genannten Lamor-Frequenz

$$\omega_0 = \gamma B \ , \ \gamma : \text{const}$$

durch. Durch ansetzen eines weiteren, in der XY-Ebene mit der Frequenz ω_0 und Amplitude F schwingenden **B** Feldes, kann je nach Wirkungszeit der Spin der Teilchen entsprechend präpariert werden. Dabei ändern sich die Spin-Erwartungswerte mit der Frequenz

$$\Omega = \gamma F$$

Insbesondere ist

$$\overline{s}_z \sim \cos(\Omega t)$$

Durch einwirken eines $\pi/2$ Pulses wird der Spin in die XY-Ebene gedreht ($\overline{s}_z = 0$) in der er nun weiterhin Präzediert. Da jedoch, aufgrund von lokalen Inhomogenitäten bzw. inneren Wechselwirkungen des Mediums, unterschiedliche Teilsysteme im allgemeinen etwas unterschiedliche Lamorfrequenzen besitzen (z.B. aufgrund eines **B**-Feld-Gradienten), geraten die, einst in Phase und makroskopisch messbaren, Spin-Vektoren außer Phase (*Dekoherenz*) so dass mit der Zeit deren Mittelwert $\tilde{\overline{s}}_{xy}$ gegen 0 geht. Dies wir durch die Bloch-Gleichung

$$\frac{d\tilde{\overline{s}}_{xy}}{dt} = -\frac{\tilde{\overline{s}}_{xy}}{T_2}$$

beschrieben, wobei T_2 die so genannte *transversale Relaxationszeit* darstellt. Durch erneutes Anwenden nach einer Zeit T eines geeigneten Pulses (genannt π-Puls), klappen die einzelnen Spin-Vektoren $\overline{\mathbf{S}}$ um, das heißt werden um 180° um die X-Achse gedreht (und somit effektiv um diese gespiegelt) und sind nach einer Zeit T erneut in Phase und somit makroskopisch messbar (*spin-echo*).

Alternativ kann der Spin-Echo wie folgt verstanden werden. Die Spin-Vektoren $\overline{\mathbf{S}}$, die durch einen entsprechenden Puls sowohl mit einer z als auch einer xy-Komponente präpariert sind, präzedieren aufgrund ihrer unterschiedlichen Wechselwirkung mit der Umgebung unterschiedlich schnell um die z-Achse. Durch einen weiteren π-Puls wird die z-Komponente ($\overline{s}_z$) *umgeklappt*, so dass jetzt die Wechselwirkungsunterschiede umgekehrt sind, die Spins *laufen wieder zusammen*.

Messung der transversalen Relaxationszeit

Unter Annahme eines um den Maximalpunkt ($t = 2T$) symmetrischen Echos, ist die $\frac{1}{e}$-Wertsbreite des Echos näherungsweise gegeben durch $2T_2$. Dies erlaubt eine direkte Bestimmung der Relaxationszeit T_2. Zu bemerken sei dass die Intensität des Spin-Echos allgemein geringer ist, als die ursprüngliche Response, was jedoch keinen Einfluss auf das Ergebnis haben wird.

Messung der longitudinalen Relaxationszeit

Durch anwenden eines geeigneten Pulses wird der Mittelwert $\tilde{\bar{s}}_z$ aus dem thermodynamischen Gleichgewichtswert $\tilde{\bar{s}}_{z0}$ in den Wert $-\tilde{\bar{s}}_{z0}$ gebracht. Anschließend strebt jedoch das System erneut diesen Wert anzunehmen, beschrieben durch die Bloch-Gleichung

$$\frac{d\tilde{\bar{s}}_z}{dt} = \frac{\tilde{\bar{s}}_{z0} - \tilde{\bar{s}}_z}{T_1}$$

mit der *longitudinalen Relaxationszeit* T_1, das heißt es ist

$$\tilde{\bar{s}}_z(t) = \tilde{\bar{s}}_{z0}\left(1 - 2e^{-\frac{t}{T_1}}\right)$$

Durch die Messung dieses Verlaufs, lässt sich nun direkt auf T_1 schließen.

Aufgabe 03

Der Zeeman-Effekt geht dann in den Paschen-Back-Effekt über, wenn bei der Energieaufspaltung nicht mehr von einem Gesamtdrehimpuls **J** ausgegangen werden kann, sondern Spin und Bahndrehimpuls getrennt an das Magnetfeld koppeln. Dies tritt ein, wenn die externe Magnetfeldstärke die, durch den Bahndrehimpuls erzeugte, Feldstärke überschreitet, bzw. die *Zeeman*-Aufspaltungsenergie in die Größenordnung der Spin-Bahn-Kopplungsenergie gelangt ($\mu_B B > E_{\mathrm{LS}}$)