**Blatt 4**

**Aufgabe 1:** Feinstruktur Wasserstoffatom (5 Punkte)

a) Berechnen Sie mit Hilfe der Störungsrechnung die relativistische Energiekorrektur $E_R$ erster Ordnung als Diagonalmatrixelement des Störoperators. Der relativistische Hamiltonian des Wasserstoffatoms ist gegeben durch

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{r} - \frac{p^4}{8m^3c^2} .$$

Drücken Sie dazu die Störung durch den ungestörten Hamiltonian aus. Folgende Relationen könnten hilfreich sein:

$$\left\langle \psi_{nl} \left| r^{-1} \right| \psi_{nl} \right\rangle = \frac{1}{n^2 a_0}$$

$$\left\langle \psi_{nl} \left| r^{-2} \right| \psi_{nl} \right\rangle = \frac{2}{n^3(2l+1)a_0^2} .$$

b) Durch eine analoge Rechnung lässt sich die Energiekorrektur der Spin-Bahn-Kopplung berechnen als

$$E_{LS} = \frac{|E_n|\alpha^2}{n}\left[\frac{j(j+1) - l(l+1) - 3/4}{l(l+1)(2l+1)}\right].$$

Die Feinstrukturkorrektur ergibt sich als Summe $E_{FS}=E_R+E_{LS}$ zu

$$E_{FS} = \frac{\alpha^2 E_n}{n^2}\left(\frac{n}{j+1/2} - \frac{3}{4}\right).$$

Zeichnen Sie das Termschema von Wasserstoff unter Berücksichtigung von $E_{FS}$ von n=1 bis n=3. Berechnen Sie für n=1 und n=2 die Feinstrukturaufspaltung.

**Aufgabe 2:** (3 Punkte)

Zeichnen Sie das Energieniveauschema von Natrium für n=3 mit Feinstruktur und benennen Sie die Terme. Erläutern Sie die Ursache der auftretenden Energieverschiebungen und -differenzen und schätzen sie deren Größenordnung ab.

**Aufgabe 3:** (3 Punkte)

Der Spin $S = (S_x, S_y, S_z)$ erfüllt als quantenmechanischer Drehimpuls die Eigenwertgleichungen

$$S^2 \chi_{s,m_s} = s(s+1)\hbar^2 \chi_{s,m_s} \qquad \text{und} \qquad S_z\ \chi_{s,m_s} = m_s\ \hbar\ \chi_{s,m_s} .$$

Vom Stern-Gerlach-Experiment wissen Sie, dass $m_s$ halbzahlig ist und nur 2 Werte $m_s = \pm \frac{1}{2}$ annehmen kann. Also muss s = ½ sein.

a) Da $m_s$ nur 2 Werte hat, nehmen Sie als Basisvektoren in einer Matrixdarstellung

$$\chi_{1/2,1/2} = \alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \chi_{1/2,-1/2} = \beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

an. Überlegen Sie, wie die 2 x 2-Matrizen $\mathbf{S}^2$ und $S_z$ aussehen müssen, damit obige Eigenwertgleichungen erfüllt sind.

b) Die Schiebeoperatoren $S_\pm = S_x \pm iS_y$ haben folgende Wirkung auf die Basisvektoren $\alpha$ und $\beta$:

$$S_+ \alpha = 0 \qquad S_+ \beta = \hbar\alpha$$
$$S_- \alpha = \hbar\beta \qquad S_- \beta = 0$$

Überlegen Sie, wie $S_+$ und $S_-$ aussehen müssen, damit dies gewährleistet ist. Folgern Sie aus $S_+$ und $S_-$ die 2 x 2-Matrizen für $S_x$ und $S_y$. Vergleichen Sie $2/\hbar$ S mit den Pauli-Spinmatrizen.