Atom & Molekülphysik

FSU Jena - WS 2008/2009
Serie 02 - Lösungen

Stilianos Louca

5. November 2008

Aufgabe 01

Aus dem charakteristischen Polynom

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda\,\mathrm{Id} - A) = \det\begin{pmatrix} \lambda-1 & -2 & -3 \\ -4 & \lambda-5 & -6 \\ -7 & -8 & \lambda-9 \end{pmatrix} = \lambda\left(\lambda^2 - 15\lambda - 18\right) = \lambda \cdot \left(\lambda - \frac{15+3\sqrt{33}}{2}\right) \cdot \left(\lambda - \frac{15-3\sqrt{33}}{2}\right)$$

sind die Eigenwerte

$$\lambda_0 = 0\ ,\ \lambda_1 = \frac{15+3\sqrt{33}}{2}\ ,\ \lambda_2 = \frac{15-3\sqrt{33}}{2}$$

der Matrix A abzulesen. Wegen $\lambda_0 = 0$ ist offensichtlich A nicht injektiv und somit

$$\det A = 0$$

Die jeweiligen Eigenvektoren v_i ergeben sich durch Lösung des linearen Gleichungssystems

$$(A - \lambda\,\mathrm{Id})\, v_i \overset{!}{=} 0$$

(z.B. Gauss Jordan Verfahren). Durch direktes Ausrechnen ergibt sich

$$v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\ ,\ v_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{3}{22}\sqrt{33} \\ \frac{1}{4} + \frac{3}{44}\sqrt{33} \\ 1 \end{pmatrix}\ ,\ v_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{3}{22}\sqrt{33} \\ \frac{1}{4} - \frac{3}{44}\sqrt{33} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 02

Das Magnetfeld sei gegeben durch $B = \|B\| \cdot e_3$.

a) Ein Teilchen der Ladung q, Masse m und Ortsvektor x erfüllt die DGL

$$\ddot{x} = \frac{q}{m} \cdot \dot{x} \times B$$

Zu erkennen ist: Ist für einen bestimmten Zeitpunkt $t : \dot{x}(t) \perp e_3$, so bleibt wegen $\ddot{x} \perp B, \dot{x}$ stets $\dot{x} \perp B$ bzw. $\|\dot{x}\|$: const, das heißt x durchläuft eine Kreisbahn (Radius ρ) in der Ebene $e_3^{\perp}$. Dabei gilt

$$\|\ddot{x}\| = \frac{|q|}{m} \cdot \|\dot{x}\| \cdot \|B\| = \frac{\|\dot{x}\|^2}{R}$$

und somit

$$\boxed{\rho = \frac{m\,\|\dot{x}\|}{|q| \cdot \|B\|}}$$

Wurde die kinetische Energie T dem Teilchen durch Beschleunigung in einem Potentialgradienten (Potentialdifferenz U) übergeben, so gilt

$$\|\dot{x}\| = \sqrt{\frac{2T}{m}} = \sqrt{\frac{2\,|q|\,U}{m}}$$

bzw.

$$\boxed{\rho = \frac{1}{\|B\|}\sqrt{\frac{2mU}{|q|}}}$$

Speziell für einfach geladene Kaliumionen, mit $\|B\| = 1$ T, $U = 2\times 10^3$ V, $q = e$, $m = 39.1$ u ergibt sich ein Bahnradius von

$$\rho_k \approx 4.029 \times 10^{-2} \text{ m}$$

b) Bildet die Teilchengeschwindigkeit $\dot{x}(0)$ beim Eingang in das Spektrometer mit der Photoflächen-Normalen e_2 den Winkel α, so bildet auch der Durchmesser des Kreises den gleichen Winkel mit e_1 (vgl. Abbildung 1).

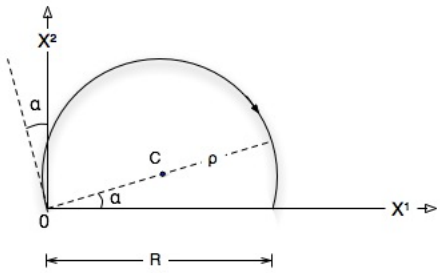

Abbildung 1: Zu Aufgabe 02.b

Das Zentrum C befindet sich in dem Fall bei $C = \rho\cos\alpha \cdot e_1 + \rho\sin\alpha \cdot e_2$, das heißt die die Kurve beschreibende Kreisgleichung ist gegeben durch

$$(x^1 - \rho\cos\alpha)^2 + (x^2 - \rho\sin\alpha)^2 = \rho^2 \ , \ x^3 = 0$$

Der Aufprallpunkt (bzw. Messpunkt auf der Photoplatte) $P = (R, 0, 0)$ ist dann gegeben durch

$$R = 2\rho\cos\alpha$$

Bei einer Winkeldivergenz $\pm\alpha$ ergibt sich also der mögliche Aufprallbereich gemäß $R \in [2\rho\cos\alpha, 2\rho]$ das heißt die Untersuchung einer bestimmten Teilchenart ergibt keine scharfen Punkte, sondern verschmierte Streifen auf der Photoplatte. Zwei Teilchenarten (unterschiedlicher Massen m und $m + \delta m$, o.B.d.A $\delta m > 0$) können somit nur dann klar unterscheiden werden, so lange sich die beiden entsprechenden Flecken nicht überschneiden:

$$[2\rho(m)\cos\alpha, 2\rho(m)] \cap [2\rho(m+\delta m)\cos\alpha, 2\rho(m+\delta m)] \stackrel{!}{=} \emptyset$$

Da $\rho(m)$ monoton Wachsend ist, vereinfacht sich obere Bedingung zu

$$\rho(m+\delta m)\cos\alpha \stackrel{!}{>} \rho(m)$$

Für kleine Massenunterschiede δm ist $\rho(m+\delta m) \approx \rho(m) + \dfrac{d\rho}{dm}\delta m$, das heißt es muss gelten

$$\frac{1}{\|B\|}\sqrt{\frac{U}{2\,|q|}} \cdot \frac{\delta m}{\sqrt{m}} \cdot \cos\alpha = \frac{d\rho}{dm}(m) \cdot \delta m \cdot \cos\alpha \stackrel{!}{>} \rho(m)(1-\cos\alpha) = \frac{1}{\|B\|}\sqrt{\frac{2Um}{|q|}} \cdot (1-\cos\alpha)$$

also

$$\delta m \stackrel{!}{>} 2m \cdot \frac{(1-\cos\alpha)}{\cos\alpha}$$

Das Auflösungsvermögen ergibt sich demnach gemäß

$$\boxed{A_m = \frac{m}{(\delta m)_{\min}} = \frac{\cos\alpha}{2(1-\cos\alpha)} \overset{\alpha\approx 0}{\approx} \frac{2-\alpha^2}{2\alpha^2}}$$

Speziell für die Kaliumisotope, mit $\delta m \approx 1$ u ist

$$\frac{m}{\delta m} \approx 39.1 \ll A_m \approx 364$$

das heißt das Auflösungsvermögen ist für deren Nachweis mehr als genug!

Aufgabe 03

Identifiziert man die De-Broglie-Wellenlänge λ des Teilchens, mit der Kastenlänge L, so ergibt sich für den Impuls p des Teilchens

$$p = \frac{h}{\lambda} \overset{\lambda=L}{=} \frac{h}{L}$$

Durch die Heisenbergsche Unschärferelation erhält man unter Annahme der Ortsunschärfe $\Delta x = L$ die minimalste Unschärfe Δp für den Impuls gemäß

$$\Delta p \geq \frac{\hbar}{\Delta x} \overset{\Delta x=L}{=} \frac{\hbar}{L}$$

Die kinetische Energie des Teilchens ist gegeben durch

$$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{h^2}{2mL^2}$$