

Atom & Molekülphysik

FSU Jena - WS 2008/2009

Serie 01 - Lösungen

Stilianos Louca

5. November 2008

Aufgabe 01

Unter der Näherung dass das Teilchen sich stets auf einer, mit veränderlichen Radius $r(t)$, Kreisbahn bewegt, das heißt näherungsweise gilt

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = m_0 r \omega^2 \quad (1)$$

schreiben wir für die Energie zum Zeitpunkt t

$$E(t) = V(r) + T(r) = \frac{m_0 r^2 \omega^2}{2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \stackrel{1}{=} -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r(t)}$$

Mit

$$\frac{e^6}{96\pi^3 \epsilon_0^3 c^3 r^4 m_0^2} = P = -\frac{dE}{dt} = -\frac{dE}{dr} \frac{dr}{dt} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r^2} \frac{dr}{dt} \Rightarrow \frac{dr}{dt} = -\frac{e^4}{12\pi^2 \epsilon_0^2 c^3 r^2 m_0^2}$$

folgt für einen Anfangsradius r_0

$$-\frac{r_0^3}{3} = \int_{r_0}^0 r^2 dr = -\frac{e^4}{12\pi^2 \epsilon_0^2 c^3 m_0^2} \int_0^T dt = -\frac{e^4 T}{12\pi^2 \epsilon_0^2 c^3 m_0^2}$$

Die benötigte Zeit T ergibt sich demnach gemäß

$$T = \frac{4\pi^2 \epsilon_0^2 c^3 m_0^2 r_0^3}{e^4} \approx 1.057 \times 10^{-10} \text{ s}$$

Aufgabe 02

- a) Für eine Atommasse m_0 und der Annahme dass sich die Atome als undurchdringbare Kugeln (Durchmesser D) in der dichtesten Kugelpackung befinden, das heißt einen Raumfüllungsgrad

$$\tau = \frac{\pi}{3\sqrt{2}}$$

erreichen, ergibt sich eine Materialdichte

$$\rho = \frac{m_0 \tau}{V_{\text{Kugel}}} = \frac{\sqrt{2} m_0}{D^3}$$

Umgekehrt ist also

$$D = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2} m_0}{\rho}}$$

- b) Speziell ist dann

Element	Durchmesser
Lithium	3.13×10^{-10} m
Magnesium	3.23×10^{-10} m
Eisen	2.55×10^{-10} m
Silber	2.89×10^{-10} m
Blei	3.51×10^{-10} m
Gold	2.88×10^{-10} m

Aufgabe 03

Das Auflösungsvermögen A eines Spektrometers in einer Umgebung der Wellenlänge λ wird definiert durch

$$A := \frac{\lambda}{\delta\lambda}$$

wobei $\delta\lambda$ der kleinste noch unterscheidbare Wellenlängenunterschied ist. Für ein Prismenspektrometer der Basisbreite b ergibt sich

$$A_p = b \left. \frac{dn}{d\lambda} \right|_{\lambda}$$

Für ein Gitterspektrometer mit N Gitterlinien (wobei jede Linie eine Delta-Distribution als Transferfunktion habe) ist

$$A_g = Nn \mid_{\lambda}$$

- a) Beim Übergang eines Elektrons vom Niveau n zum Niveau n' ist bei Wasserstoff-ähnlichen Systemen in erster Näherung (Kern : fest) die Wellenlänge λ des emittierten Photons gegeben durch

$$\frac{1}{\lambda} = R_{\infty} \cdot \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

wobei R_{∞} die Rydberg-Konstante ist. Durch Mittbetrachtung der Kern-Masse M , das heißt durch Ersetzung der Elektron-Masse m_e mit der reduzierten Masse $\mu = \frac{m_e M}{m_e + M}$, ergibt sich die gegenüber der ursprünglichen Rydberg-Konstante R_{∞} korrigierte Rydberg-Konstante

$$R = R_{\infty} \frac{\mu}{m} = \frac{R_{\infty}}{1 + \frac{m_e}{M}}$$

Für zwei verschiedene Kernmassen M_1, M_2 ergibt sich bei Wasserstoff-ähnlichen Systemen, beim Übergang von Niveau n in das Niveau n' , ein Wellenlängenunterschied von

$$\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2 = \lambda_1 \left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) = \lambda_1 \left(1 - \frac{R_2}{R_1} \right) = \lambda_1 \left[1 - \frac{1 + \frac{m_e}{M_1}}{1 + \frac{m_e}{M_2}} \right]$$

Mit einem spektralen Auflösungsvermögen von A ist der kleinste messbare spektrale Abstand im Bereich λ_1 gegeben durch

$$\delta\lambda = \frac{\lambda_1}{A}$$

Der spektrale Unterschied $\Delta\lambda$ der beiden Linien ist also genau dann messbar wenn

$$|\Delta\lambda| \geq \delta\lambda \Leftrightarrow \left| 1 - \frac{1 + \frac{m_e}{M_1}}{1 + \frac{m_e}{M_2}} \right| \geq \frac{1}{A}$$

Speziell für das Wasserstoff-Atom mit $\frac{m_e}{M_H} = 5.45 \times 10^{-4}$ und das Deuterium-Atom mit $\frac{m_e}{M_D} = 2.72 \times 10^{-4}$ ist bei einem Auflösungsvermögen des Prismenspektrometers $A_p = 2500$

$$\left| 1 - \frac{1 + \frac{m_e}{M_1}}{1 + \frac{m_e}{M_2}} \right| = 2.73 \times 10^{-4} \leq 4 \times 10^{-4} = \frac{1}{A_p}$$

das heißt die beiden Linien können nicht unterschieden werden.

b) Eine Frequenzdifferenz $\Delta\nu = 10 \times 10^9$ Hz entspricht bei einer mittleren Wellenlänge $\lambda \gg \Delta\lambda$ einer Wellenlängendifferenz

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = \frac{c}{\nu_2} - \frac{c}{\nu_1} = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{c} \Delta\nu \approx \frac{\lambda^2}{c} \Delta\nu$$

Um diese Differenz mit einem Gitter auflösen zu können, muss gelten:

$$\delta\lambda = \frac{\lambda}{A_g} = \frac{\lambda}{Nn} \stackrel{!}{\leq} \Delta\lambda \Leftrightarrow N \gtrsim \frac{c}{\Delta\nu \cdot n\lambda} \approx 61648$$

c) Die Transmissivität τ eines verlustfreien, symmetrischen Fabry-Perot Spiegelsystems ist gegeben durch

$$\tau = \left[1 + \frac{4\rho}{(1-\rho)^2} \sin^2(kD + \varphi) \right]^{-1}$$

wobei $\rho = |R|^2$ die Reflektivität, $k = \frac{2\pi}{\lambda} n_f$ die Wellenzahl, λ die Wellenlänge im Vakuum, n_f der Brechungsindex zwischen den Spiegeln, D der Spiegelabstand und φ der Phasenterm des Reflektionskoeffizienten (meist $\varphi = 0$) sind. Es liegt genau dann ein Transmissionsmaximum vor, falls gilt

$$kD + \varphi = m\pi \quad (2)$$

Als kleinster auflösbarer spektraler Abstand Δk kann die spektrale Halbwertsbreite der Transmissionsmaxima k_0 interpretiert werden:

$$\tau\left(k_0 + \frac{\Delta k}{2}\right) \stackrel{!}{=} \frac{1}{2} \tau(k_0) = \frac{1}{2} \rightsquigarrow \underbrace{\sin^2\left(k_0 D + \varphi + \frac{\Delta k}{2} D\right)}_{\approx (\frac{\Delta k}{2} D)^2} \stackrel{!}{=} \frac{(1-\rho)^2}{4\rho} \Rightarrow \Delta k \approx \frac{(1-\rho)}{D\sqrt{\rho}}$$

Bemerkung: τ ist symmetrisch um das Transmissionsmaximum.

Die entsprechende kleinste auflösbare spektrale Differenz ergibt sich durch

$$\Delta k \approx \frac{2\pi}{\lambda^2} n_f \Delta\lambda$$

gemäß

$$\Delta\lambda \approx \frac{\lambda^2}{2\pi n_f} \cdot \frac{(1-|R|^2)}{D|R|}$$

Speziell für $R = 0.995$ und $D = 1 \times 10^{-2}$ m und $\lambda_{H\beta} \approx 4.86 \times 10^{-7}$ m ergibt sich ein Auflösungsvermögen von

$$A_f = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \approx 1.29 \times 10^7$$

Zu erkennen ist das relativ hohe Auflösungsvermögen das genau aus der Empfindlichkeit des Resonators gegenüber Spiegelabstand bzw. Wellenlänge resultiert. Mögliche Nachteile eines solchen Spektrometers sind:

- Die nicht-Eindeutigkeit der Zuordnung einer Wellenlänge bei einem Transmissionsmaximum für einen bestimmten Abstand (vgl.), insbesondere wegen des relativ schmalen freien Spektralbereiches

$$\Delta\lambda \Big|_{\text{FSB}} \approx \frac{\lambda^2}{2D} \approx 1.18 \times 10^{-11} \text{ m}$$

- Bei besonders hohen Reflexionskoeffizienten (und somit Auflösungsvermögen) können sehr starke Feldüberhöhungen zwischen den Spiegeln stattfinden, was gewisse Anforderungen an das verwendete Medium stellt.
- Die relativ hohe Justierempfindlichkeit.