Einführung in die Astronomie
FSU Jena - WS 2009/2010
Übungsserie 11 - Lösungen

Stilianos Louca

7. Februar 2010

Aufgabe 11.1

Seien R, L, M, T und ρ jeweils der Radius, Leuchtkraft, Masse, effektive Temperatur und mittlere Dichte des betrachteten Sterns. Nach Stefan-Boltzman gilt

$$L \approx \sigma T^4 \cdot 4\pi R^2$$

so dass sich die Dichte ρ ergibt gemäß

$$\rho = \frac{3M}{4\pi R^3} \approx \frac{3M}{4\pi}\left(\frac{4\pi\sigma}{L}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot T^6 = \rho_\odot \cdot \frac{M}{M_\odot}\left(\frac{(T/T_\odot)^4}{(L/L_\odot)}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Setzt man für die B0V-Reihe $T/T_\odot \approx 5.2$, $M/M_\odot \approx 15$, $\rho_\odot \approx 1.4 \times 10^3\ \mathrm{Kg} \cdot \mathrm{m}^{-3}$ und $L/L_\odot \approx 10^6$, so erhält man

$$\boxed{\rho \approx 2.9 \times 10^{-4} \cdot \rho_\odot \approx 0.42\ \mathrm{Kg} \cdot \mathrm{m}^{-3}}$$

Aufgabe 11.2

Sind $T_1, T_2 = 1.1 \cdot T_1$ die effektiven Temperaturen der beiden Sterne, so hängen diese mit den entsprechenden Leuchtkräften L_1, L_2 bzw. Radien R_1, R_2 nach Stefan-Boltzman gemäß

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{T_1^4}{T_2^4}\frac{R_1^2}{R_2^2}$$

zusammen. Mit dem empirischen Zusammenhang $L \propto R^{5.2}$ also

$$\frac{L_1}{L_2} = \left[\frac{T_1}{T_2}\right]^{6.5}$$

Der Magnitudenunterschied der beiden Sterne ergibt sich dementsprechend als

$$m_1 - m_2 = -\frac{5}{2}\log_{10}\frac{L_1}{L_2} = -16.25\log_{10}\frac{T_1}{T_2} \approx 0.67\ \mathrm{mag}$$

Aufgabe 11.3

Unter der Annahme eines nicht-rotierenden, kugelförmigen Sterns des Anfangsradius R und Masse M mit homogener Massenverteilung der Dichte ρ, ist aufgrund der Kugelsymmetrie der Radialabstand $r(t, r_0)$ eines Massenpunktes, das zum Zeitpunkt den Radialabstand r_0 besitze, nur von der Zeit, nicht aber vom Winkel abhängig. Insbesondere behält der Stern seine Kugelsymmetrie, so dass auf jeden Punkt nur das Gravitationsfeld der *inneren Massenkugel* wirkt (vgl. Abb. (0.1)).

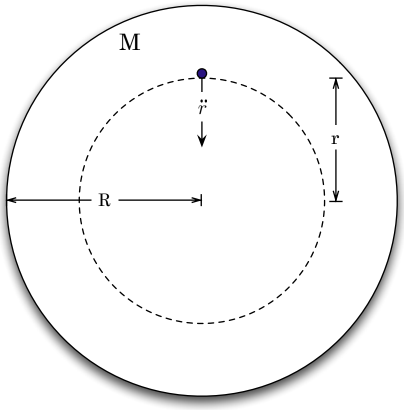

Abbildung 0.1: Zur Aufgabe 11.3: Beschleunigung eines Massenpunktes durch die eigene Gravitationskraft des Planeten. Der Punkt *spürt* nur das Feld innerer Schichten.

Solange sich keine Schichten *auf dem Weg ins Zentrum überholen*, bleibt für jeden fallenden Punkt diese innere Masse konstant und beträgt

$$M = M(r_0) = M \cdot \left(\frac{r_0}{R}\right)^3$$

Dementsprechend genügt jeder Massenpunkt dem Anfangswertproblem

$$\ddot{r} = -\frac{GM}{r^2} = -\frac{GM}{r^2}\left(\frac{r_0}{R}\right)^3 \quad , \quad r(0) = r_0,\ \dot{r}(0) = 0 \tag{0.1}$$

Durch den Ansatz $\dot{r} = \dot{r}(r)$ erhält man zunächst

$$\dot{r} = -\sqrt{2GM\frac{r_0^3}{R^3}} \cdot \sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}}$$

und schließlich

$$t = \int\limits_0^t dt = \int\limits_r^{r_0} \frac{d\rho}{\sqrt{2GM\frac{r_0^3}{R^3}} \cdot \sqrt{\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r_0}}} = \sqrt{\frac{R^3}{2GMr_0^3}} \cdot \left[-\rho r_0 \sqrt{\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r_0}} + \frac{r_0^{\frac{3}{2}}}{2} \cdot \arctan\left[\frac{(2\rho - r_0)}{2\sqrt{\rho(r_0 - \rho)}}\right]\right]\Bigg|_{\rho=r}^{r_0}$$

$$= \sqrt{\frac{R^3}{2GMr_0^3}} \cdot \left[\frac{r_0^{\frac{3}{2}}\pi}{4} + rr_0\sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}} - \frac{r_0^{\frac{3}{2}}}{2} \cdot \arctan\left[\frac{(2r - r_0)}{2\sqrt{r(r_0 - r)}}\right]\right] = t(r, r_0)$$

Abbildung (0.2) zeigt den typischen Verlauf von $r(t, r_0)$ für verschiedene Anfangswerte r_0.

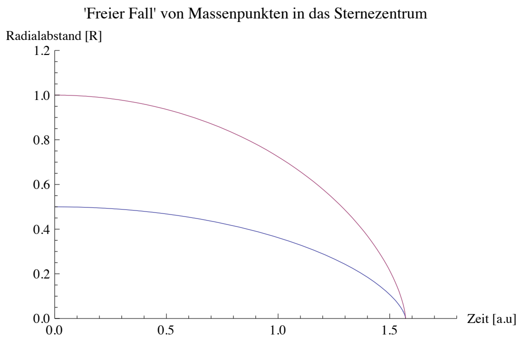

Abbildung 0.2: Zur Aufgabe 11.3: Freier Fall zweier Stern-Massenpunkte bei verschiedenen Anfangspositionen ins Zentrum. Hier wurde $2GM/R^3 = 1$ angenommen, Zeit ist in willkürlichen Einheiten.

Insbesondere erhält man eine Kollapszeit von

$$\boxed{T = t(r=0, r_0) = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{R^3}{2GM}} = \sqrt{\frac{3\pi}{32G\rho}}} \tag{0.2}$$

Beachte dass T tatsächlich von r_0 unabhängig ist, also alle Punkte zum gleichen Zeitpunkt im Zentrum ankommen. Speziell für die Sonne ($\rho_\odot \approx 1.4 \times 10^3$ Kg $\cdot$ m^{-3})

$$T_\odot \approx 29.6 \text{ min}$$

und für eine Staubwolke der Dichte $\rho = 10^{-18}$ Kg $\cdot$ m^{-3}

$$T_{\text{staub}} \approx 2.1 \times 10^6 \text{ a}$$

Aufgabe 11.4

Der Stern sei Kugelförmig mit Radius R, Masse M und besitze konstante Dichte ρ. Auf jedes Massenelement der Dichte ρ im Abstand r vom Sternzentrum, wirkt im Prinzip die Gesamt-Radialkraftdichte

$$f_{\text{rad}} \approx \underbrace{f_{\text{dru}}}_{\substack{\text{Druckkräfte}\\ \text{z.B. Strahlung, Gas}}} + \underbrace{f_{\text{zen}}}_{\text{Zentrifugalkraft}} - \underbrace{f_{\text{gra}}}_{\text{Gravitation}}$$

Dabei ist

$$f_{\text{gra}} = \frac{4\pi G}{3} \cdot r\rho^2 = \frac{GM}{R^3} \cdot r\rho$$

und

$$f_{\text{zen}} = \omega^2 \cdot r\rho$$

wobei ω die lokale Winkelgeschwindigkeit um die Sternachse sei. Im mechanischen Gleichgewicht muss gelten

$$f_{\text{rad}} \approx 0 \quad \Rightarrow \quad f_{\text{zen}} \lesssim f_{\text{gra}}$$

das heißt selbst bei Vernachlässigung jeglicher Druckkräfte ist die Winkelgeschwindigkeit nach oben durch

$$\omega \lesssim \sqrt{\frac{GM}{R^3}}$$

bzw. die Rotationsperiode nach unten durch

$$T \gtrsim 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

beschränkt. Speziell für $R \approx 1.5 \times 10^8$ km und $M = M_\odot$

$$\boxed{T \gtrsim 1.0 \text{ a}}$$

Bemerkung: Die Übereinstimmung der unteren Grenze mit der Erd-Umlaufperiode, resultiert daraus dass das Außen-Gravitationsfeld kugelsymmetrischer Masseverteilungen unabhängig vom tatsächlichen Radius der Massekugel ist, sprich ein Massenelement am Rand eines roten Rießen einer Sonnenmasse, wird bei $r = 1$ AU Radialabstand genauso beschleunigt wie die Erde.

Aufgabe 11.5

Eine Strahlungs-Energieflussdichte I entsprich einer Impulsstromdichte von $j = I/c$. Unter Annahme vollständiger Reflexion (→ maximaler Impulsübertragung) der, vom Stern emittierten & auf den Segel auftreffenden, Strahlung, entspricht dies einem Impulsfluss (bzw. Schubkraft) von

$$F_{\text{schub}} = \frac{dP}{dt} = 2j \cdot A = 2\frac{IA}{c}$$

wobei A die Querschnittfläche der Folie sei. Sind R, M und L jeweils Radius, Masse und Leuchtkraft des Sternradius, so entspricht dies im Abstand R vom Zentrum einer Gravitationsbeschleunigung von

$$g_{\text{stern}} = \frac{GM}{R^2}$$

und einer Flussdichte von

$$I = \frac{L}{4\pi R^2}$$

Die maximal ertragbare Last ergebe sich für den Segel dementsprechend als

$$m_{\max} = \frac{F_{\text{schub}}}{g_{\text{stern}}} = \frac{2AL}{4\pi GcM} \approx 1990 \text{ Kg}$$

Fordert man dass der Segel zumindest sein Eigengewicht überwinden kann, ergibt sich eine maximale Dicke von

$$d_{\max} = \frac{m_{\max}}{\rho A} = \frac{2L}{4\pi\rho GcM}$$

wobei ρ die Materialdichte des Segels sei. So ergibt sich z.B. für Aluminium ($\rho_{\text{Al}} \approx 2.7 \times 10^3 \text{ Kg} \cdot \text{m}^{-3}$) eine Maximaldicke von

$$d_{\max}^{\text{Al}} \approx 7.4 \text{ mm}$$

Aufgabe 11.6

Da *Sterne* geringerer Leuchtkraft (z.B. weiße Zwerge, Protosterne) typischerweise schwerer zu entdecken sind, sind sie im HRD unterrepräsentiert. Dazu kommt, dass massearme Sterne ($m \lesssim m_\odot/2$) tendenziell Hauptreihen-Lebensdauern von über 10^{11} a besitzen, so dass diese noch nicht die Hauptreihe verlassen haben.