

Einführung in die Astronomie

FSU Jena - WS 2009/2010

Übungsserie 09 - Lösungen

Stilianos Louca

18. Januar 2010

Aufgabe 9.1

Nach Kepler ist die Umlaufperiode T eines Körpers der Masse m um einen größeren Körper der Masse $M \gg m$ durch

$$T \approx 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{GM}}$$

mit der entsprechenden großen Halbachse a verbunden. Ist ρ die mittlere Dichte des Zentralkörpers und R sein Radius, so ergibt sich mit der Abschätzung $a \geq R$

$$T \geq 2\pi \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}$$

Die größten Dichten im Universum tauchen mitunter auf der Erde auf und betragen rund $\rho_{\max} \approx 5.5 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$, was einer minimalen Umlaufperiode von

$$T_{\min} \approx 84'$$

Aufgabe 9.2

Da Europa einen Abstand zu Jupiter mindestens 10^3 mal kleiner als den Perihelion von Jupiter besitzt, können wir annähernd annehmen dass Europa & Jupiter die gleiche Bahn, insbesondere einen Perihelion von $r_{\text{J}}^{\min} \approx 4.95 \text{ AU}$ und Aphelion von $r_{\text{J}}^{\max} \approx 5.46 \text{ AU}$, besitzen. Machen die Annahme dass sich die Erde auf einer Kreisbahn mit Radius $r_{\oplus} = 1 \text{ AU}$ um die Sonne bewegt und Europa gleichförmig in den gesamten Raum abstrahlt. Dann besitzt Europa auf Erden:

- Minimale scheinbare Helligkeit wenn Europa sich am Perihel befindet und Erde & Europa den kleinstmöglichen Abstand $d_{\oplus\text{J}}^{\min} = r_{\text{J}}^{\min} - r_{\oplus}$ besitzen.
- Maximale scheinbare Helligkeit, wenn Europa sich am Aphel befindet und Erde & Europa den größtmöglichen Abstand $d_{\oplus\text{J}}^{\max} = r_{\text{J}}^{\max} + r_{\oplus}$ besitzen.

Befindet sich Europa im Abstand r_{J} von der Sonne und auf der Verbindungsgeraden von Sonne & Erde, im Abstand $d_{\text{J}\oplus}$ zu letzterer, so bewirkt Sonne auf Europa eine Energiezufuhrate von

$$E_{\text{in}} = \frac{E_{\odot} A_e}{4\pi r_{\text{J}}^2} = \frac{E_{\odot} R_e^2}{4r_{\text{J}}^2}$$

wobei $E_{\odot} \approx 4 \times 10^{26} \text{ W}$ die Leuchtkraft der Sonne und R_e bzw. $A_e = \pi R_e^2$ der Radius bzw. Querschnittsfläche von Europa sind.

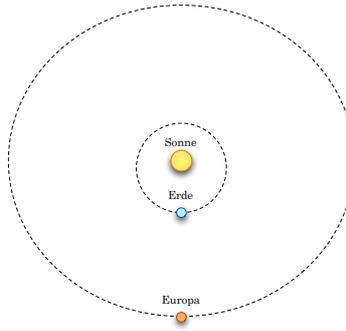


Abbildung 0.1: Zur Aufgabe 9.2: Die minimale scheinbare Helligkeit kann erreicht werden, wenn Europa sich auf seinem Perihelion und Erde zwischen Sonne & Europa befinden.

Im thermodynamischen Gleichgewicht muss Europa die gleiche Leistung $E_{\text{out}} = E_{\text{in}}$ abstrahlen. Unter Annahme einer gleichmäßigen Abstrahlung in den gesamten Raum, entspricht dies auf Erden einer Leistungsdichte von

$$I \approx \frac{E_{\text{out}}}{2\pi d_{\oplus\gamma}^2} = \frac{E_{\odot} R_e^2}{16\pi r_{\gamma}^2 d_{\oplus\gamma}^2}$$

Ist

$$I_{\odot} = \frac{E_{\odot}}{4\pi r_{\oplus}^2}$$

die Strahlungsleistungsdichte der Sonne auf Erden, so entspricht I einer scheinbaren Helligkeit von

$$m = -\frac{5}{2} \log \frac{I}{I_{\odot}} + m_{\odot}$$

mit der scheinbaren Helligkeit $m_{\odot} \approx -26.8$ mag der Sonne auf Erden, also

$$m = m_{\odot} - \frac{5}{2} \log \frac{r_{\oplus}^2 R_e^2}{4r_{\gamma}^2 d_{\oplus\gamma}^2}$$

Nach obigen Überlegungen schwankt also die scheinbare Helligkeit von Europa auf Erden zwischen

$$m^{\text{min}} \approx 6.0 \text{ mag} \quad \text{und} \quad m^{\text{max}} \approx 7.3 \text{ mag}$$

Die Tatsache dass Europa komplett mit Eis bedeckt ist, sprich eine hohe Reflexion bzw. Streuung der einfallenden Strahlung bewirkt, gibt Anlass zur Annahme einer gleichmäßigen Abstrahlung in den zur Sonne orientierten Halbraum. In dem Extremfall würde Europa auf der anderen Seite *komplett dunkel* erscheinen. Die minimale scheinbare Helligkeit würde sich dann gemäß

$$m^{\text{min}} = m_{\odot} - \frac{5}{2} \log \frac{r_{\oplus}^2 R_e^2}{2(r_{\gamma}^{\text{min}} \cdot d_{\oplus\gamma}^{\text{min}})^2} \approx 5.3 \text{ mag}$$

ergeben. Dies scheint in grober Übereinstimmung mit [2] zu sein, laut dessen die scheinbare Helligkeit von Europa auf Erden im Bereich 5.1 – 6.1 mag schwankt.

Bemerke: Die scheinbare Helligkeitsgrenze des menschlichen Auges beträgt knappe 6 mag, so dass sich Europa bzgl. seiner Helligkeit eigentlich an der Sichtbarkeitsgrenze befindet. Jedoch erscheint Europa im Vergleich zu Jupiter um ca. 8 Magnituden dunkler und befindet sich bzgl. diesem in einem Sichtwinkelbereich von ca. 3.6'. Europa geht sozusagen im Beugungsbild von Jupiter *unter* und ist daher sehr schwer zu erkennen.

Aufgabe 9.3

Sei T_{ζ} die Temperatur der Mondoberfläche und ε_{ζ} deren Emissionskonstante. Im thermodynamischen Gleichgewicht muss die von Mond abgestrahlte Leistungsfächendichte

$$I_{\text{out}} = \sigma \varepsilon_{\zeta} T_{\zeta}^4$$

gleich der von der Sonne absorbierten Leistungsfächendichte I_{in} sein. Unter Annahme vollständiger Absorption entspricht diese bei senkrechtem Einfall

$$I_{\text{in}} = \frac{\alpha_{\zeta} E_{\odot}}{4\pi d_{\odot\zeta}^2}$$

wobei $d \approx 1$ AU der Sonne-Mond-Abstand, $E_{\odot} \approx 4 \times 10^{26}$ W die Sonnenleuchtkraft und α_{ζ} die Absorptionskonstante der Mondoberfläche seien. Nach Kirchhoff muss $\varepsilon_{\zeta} = \alpha_{\zeta}$ sei und man erhält

$$T_{\zeta} = \sqrt[4]{\frac{E_{\odot}}{4\pi\sigma d_{\odot\zeta}^2}} \approx 397 \text{ K} \quad (0.1)$$

Tatsächlich erreicht die Mondoberfläche nach [1] Tagestemperaturen bis zu etwa 396 K.

Bemerkung: Da Emissionskonstante ε_{ζ} und Absorptionskonstante α_{ζ} eigentlich Wellenlängenabhängige Größen sind, können diese in obigen Rechnungen nicht einfach gleichgesetzt werden, zumal eintreffende und emittierte Strahlung ihr Maximum jeweils im sichtbaren und Infraroten Bereich besitzen.

Nimmt man alternativ $\varepsilon_{\zeta} \approx 1$ an und ersetzt α_{ζ} durch $(1 - A_{\zeta})$, wobei $A_{\zeta} \approx 0.12$ der sphärische Mond-Albedo sei, so erhält man

$$T_{\zeta} = \sqrt[4]{\frac{(1 - A_{\zeta})E_{\odot}}{4\pi\sigma\varepsilon_{\zeta} d_{\odot\zeta}^2}} \approx 384 \text{ K}$$

Aufgabe 9.4

Da Venus und Erde unterschiedliche Bahnebenen besitzen, kann ein Venustransit prinzipiell nur in der Umgebung der beiden Schnittpunkte zwischen Venusbahn und Ekliptik stattfinden. Da Venus von der Erde aus gesehen einen Winkeldurchmesser von maximal $d \lesssim 1'$ im Vergleich zum Winkeldurchmesser $D_{\odot} \approx 32'$ der Sonne besitzt, ist die Transitzeit im Prinzip gegeben durch den *Aufenthalt* des Venusmittelpunktes in der *Sonnenscheibe*.

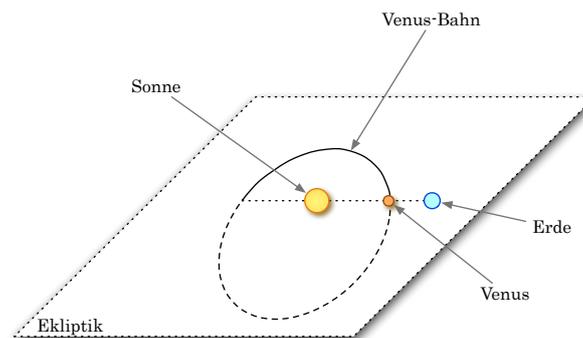


Abbildung 0.2: Zur Aufgabe 9.4: Ein Venustransit kann nur an den Punkten stattfinden, wo Venus die Ekliptik der Erde schneidet.

Da Venus die Sonne auf einer nahezu kreisförmigen Bahn mit Radius $r_{\zeta} \approx 0.72$ AU und Periode $T_{\zeta} \approx 0.62$ a umkreist, besitzt sie an diesen beiden (gegenüberliegenden) Punkten einen Abstand zur Erde $d_{\zeta\oplus} \approx r_{\oplus} - r_{\zeta}$ und eine Geschwindigkeit (bzgl. des Sonnensystems) $v_{\zeta} \approx 2\pi r_{\zeta}/T_{\zeta}$ entlang ihrer Bahn. Da letztere eine kleine

Inklination $\eta_{\varphi} \approx 3.4^\circ$ besitzt¹, entspricht dies einer von der Erde aus gesehenen Winkelgeschwindigkeit entlang der (bzgl. des Frühlingspunktes festen) Himmelskugel von

$$\omega_{\varphi} \approx \frac{v_{\varphi} - v_{\oplus}}{d_{\varphi\oplus}} \approx \frac{2\pi}{r_{\oplus} - r_{\varphi}} \cdot \left[\frac{r_{\varphi}}{T_{\varphi}} - \frac{r_{\oplus}}{T_{\oplus}} \right] \approx 207^\circ \cdot \text{a}^{-1}$$

wobei $v_{\oplus} = 2\pi r_{\oplus}/T_{\oplus}$ die Geschwindigkeit der Erde auf ihrer Bahn sei und $T_{\oplus} = 1$ a. Gleichzeitig bewegt sich jedoch auch die Sonnenscheibe auf der Himmelskugel mit einer Winkelgeschwindigkeit von

$$\omega_{\odot} = \frac{2\pi}{T_{\oplus}} = 360^\circ \cdot \text{a}^{-1}$$

in entgegengesetzter Richtung.

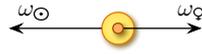


Abbildung 0.3: Zur Aufgabe 9.4: Sonnen- und Venusbewegung von der Erde aus gesehen, bzgl. der \mathcal{V} -festen Himmelskugel.

Dementsprechend ergibt sich eine (maximal mögliche) Venustransitzeit von etwa

$$t_{\text{transit}} \approx \frac{D_{\odot}}{\omega_{\varphi} + \omega_{\odot}} \approx 8.2 \text{ h}$$

Anmerkung: Im folgenden seien die Bahnlängen (*Phasen*) θ_{φ} & θ_{\oplus} von Venus bzw. Erde entlang ihrer Bahnen bzgl. eines der beiden Schnittpunkte A, B zwischen Venusbahn und Ekliptik, gezählt. Unter Annahme kreisförmiger Bahnen von Venus & Erde mit jeweils den Radien $r_{\varphi} = 0.7233$ AU & $r_{\oplus} = 1$ AU und Kreisfrequenzen $\omega_{\varphi} = 10.2132 \text{ rad} \cdot \text{a}^{-1}$ & $\omega_{\oplus} = 2\pi \text{ rad} \cdot \text{a}^{-1}$ entwickeln sich die Phasen θ_{φ} & θ_{\oplus} linear mit der Zeit. Ferner ergeben sich im Ekliptikalsystem (3. Achse senkrecht zur Ekliptik, Sonne als Zentrum) jeweils die kartesischen Koordinaten

$$\mathbf{x}_{\varphi} = r_{\varphi} \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta_{\varphi} \\ \cos \eta \cdot \sin \theta_{\varphi} \\ \sin \eta \cdot \sin \theta_{\varphi} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_{\oplus} = r_{\oplus} \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta_{\oplus} \\ \sin \theta_{\oplus} \\ 0 \end{pmatrix}$$

woraus sich mit

$$\cos \varphi = \frac{\langle \mathbf{x}_{\varphi} - \mathbf{x}_{\oplus}, -\mathbf{x}_{\oplus} \rangle}{\|\mathbf{x}_{\varphi} - \mathbf{x}_{\oplus}\| \cdot \|\mathbf{x}_{\oplus}\|}$$

schnell der Winkel φ zwischen Venus und Sonne von der Erde aus ergibt:

$$\cos \varphi = \frac{r_{\oplus} - r_{\varphi} \cdot [\cos \theta_{\oplus} \cdot \cos \theta_{\varphi} + \sin \eta \cdot \sin \theta_{\oplus} \cdot \sin \theta_{\varphi}]}{\sqrt{r_{\oplus}^2 + r_{\varphi}^2 - 2r_{\oplus}r_{\varphi} \cdot [\cos \theta_{\oplus} \cdot \cos \theta_{\varphi} + \sin \eta \cdot \sin \theta_{\oplus} \cdot \sin \theta_{\varphi}]}} \quad (0.2)$$

Graphik (0.4) zeigt die Winkelentwicklung zwischen Sonne & Venus von der Erde aus gesehen, als Funktion der ab dem letzten *perfekten* Venustransit verlaufenen Zeit.

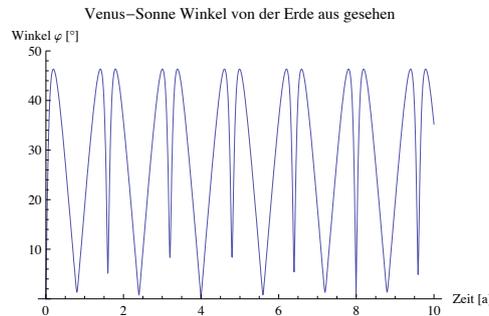


Abbildung 0.4: Zur Aufgabe 9.4: Entwicklung des Winkels zwischen Venus & Sonne von der Erde aus gesehen, als Funktion der Zeit.

¹Sprich Erde & Venus bewegen sich in nahezu gleicher Richtung.

Graphik (0.5) zeigt den gleichen Verlauf in größerem Detail.

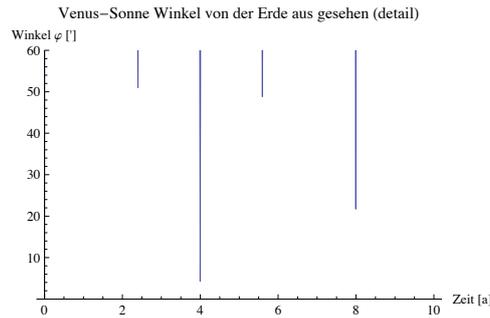


Abbildung 0.5: Zur Aufgabe 9.4: Entwicklung des Winkels zwischen Venus & Sonne von der Erde aus gesehen, als Funktion der Zeit (detailliert).

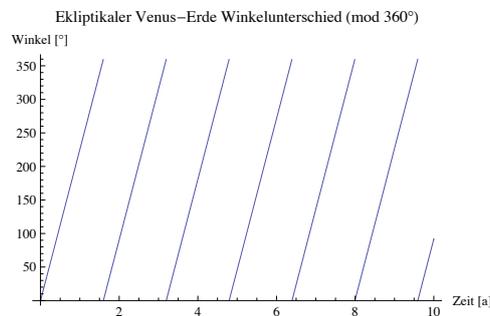


Abbildung 0.6: Zur Aufgabe 9.4: Entwicklung der ekliptikalen Winkeldifferenz zwischen Erde und Venus (mod 360°).

Auf den ersten Blick scheint Abb. (0.5) anzudeuten, dass schon nach 4 Jahren eine (zwar nicht so perfekte) Wiederholung des Transits stattfindet. Doch Abb. (0.6) offenbart, dass zwar Venus und Sonne auf ähnlicher Sichtlinie sitzen, jedoch Venus auf oberer Konjunktion ist. Tatsächlich findet sich Venus erst nach 8 Jahren wieder im Transit, diesmal natürlich in unterer Konjunktion.

Abbildung (0.4) zeigt jedoch dass sich dieses Verhalten nicht beliebig wiederholt, da die Umlaufperioden von Venus und Erde doch nicht solch ein kleines gemeinsames, ganzzahliges Vielfaches besitzen. Nimmt man an dass sich die beiden Perioden nicht in Resonanz befinden, so deckt das Tupel $(\theta_\oplus, \theta_\varphi)$ den gesamten Torus $S^1 \times S^1$ gleichmäßig ab, sprich bei gegebener Erdposition ist die ekliptikale Länge des Saturn gleichverteilt.

Wie schon erwähnt, sind die Umgebungen der Schnittpunkte A, B die einzigen möglichen Transitpunkte. Ist δ der vertikale Winkel zwischen Venus & Sonne (von der Erde aus gesehen), muss während eines Transits gelten

$$|\delta| \lesssim \frac{D_\odot}{2}$$

Mit

$$\sin \delta \approx \frac{r_\varphi}{r_\oplus - r_\varphi} \cdot \sin \eta \cdot \sin \theta_\varphi$$

(vgl. zwischen-Ergebnisse aus Aufgabe 2.4) folgt

$$|\delta| \stackrel{!}{\lesssim} 1.7^\circ =: \delta_0 \tag{0.3}$$

sprich alle Venustransitpunkte befinden sich (wenn überhaupt) im Umkreis von $\pm \delta_0$ um die Punkte A, B . Dies entspricht einem Bahnanteil von ca. 0.0094 jeweils an jedem der beiden Punkte. Befindet sich also die Erde an einem der Knotenpunkte ($2 \times$ jährlich), so entspricht dies einer jährlichen Transitwahrscheinlichkeit von ca. 0.019 bzw. einer Transitperiode von ca.

$$T \approx \frac{1 \text{ a}}{0.019} \approx 53 \text{ a}$$

was tatsächlich mit der Realität vergleichbar ist.

Literatur

- [1] *Temperatures of the Lunar Surface*, The Artemis Project
<http://www.asi.org/adb/m/03/05/average-temperatures.html> (04.01.2010)
- [2] *Solar System Dynamics*, Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology
<http://ssd.jpl.nasa.gov/horizons.cgi> (06.01.2010)