Einführung in die Astronomie
FSU Jena - WS 2009/2010
Übungsserie 07 - Lösungen

Stilianos Louca

4. Januar 2010

Aufgabe 7.1

Schätzt man die vom Auge noch sichtbare Größenklasse auf $m_{\text{eye}} \approx 8$ mag, so leuchten die vom GTC noch sichtbaren Sterne (scheinbare Helligkeit $m_{\text{GTC}} = 30$ mag) um den Faktor

$$10^{\frac{2}{5}(m_{\text{eye}} - m_{\text{GTC}})} \approx 2.5 \times 10^{-10}$$

schwächer. Die Andromeda-Galaxie ist ca. $d_{\text{and}} \approx 1.58 \times 10^{11}$ AU von der Erde entfernt[2]. Die Sonne besitzt auf der Erde eine scheinbare Helligkeit von $m_{\text{sun}} \approx 26.7$ mag. Ein ähnlicher Stern in Andromeda hätte eine scheinbare Helligkeit von

$$m_{\text{and}} = m_{\text{sun}} - \log\left(\frac{1\text{ AU}}{d_{\text{and}}^2}\right)^{\frac{5}{2}} \approx 29.3\text{ mag}$$

was für die großen Teleskope gerade noch sichtbar wäre!

Aufgabe 7.3

Ein Größenklassenunterschied $\Delta m := m_{\text{kon}} - m_{\text{opp}} = 3.43$ mag entspricht einem Flussdichte-Unterschied von

$$\frac{F_{\text{kon}}}{F_{\text{opp}}} = 10^{-2\Delta m/5}$$

bzw. einem Abstandsunterschied um den Faktor

$$f := \frac{d_{\text{konj}}}{d_{\text{opp}}} = \sqrt{\frac{F_{\text{opp}}}{F_{\text{kon}}}} = 10^{\Delta m/5} \approx 4.85$$

Sind $r_{\text{e}} \approx 1$ AU und r_{p} jeweils die Umlaufradien der Erde und des gesuchten Planeten, sprich $d_{\text{kon}} = r_{\text{e}} + r_{\text{p}}$ und $d_{\text{opp}} = r_{\text{p}} - r_{\text{e}}$, so ergibt sich

$$r_{\text{p}} = r_{\text{e}} \cdot \frac{f+1}{f-1} \approx 1.52\text{ AU}$$

Es handelt sich dabei eindeutig um den Mars!

Aufgabe 7.3

Sind $m_1, .., m_N$ die scheinbaren Helligkeiten der N Komponenten eines N-pelsterns, mit jeweils den Flussdichten $F_1, .., F_N$ am Beobachtungsort, so ergibt sich deren gesamte scheinbare Helligkeit m entsprechend der Gesamtflussdichte $F := F_1 + \cdots + F_N$ gemäß

$$m := -\frac{5}{2} \cdot \log \frac{F}{F_0} = -\frac{5}{2} \cdot \log\left[\sum_{i=1}^{N} \frac{F_i}{F_0}\right] = -\frac{5}{2} \cdot \log\left[\sum_{i=1}^{N} 10^{-\frac{2}{5} \cdot m_i}\right]$$

wobei F_0 die Referenzflussdichte sei.
Speziell ergibt sich für einen Doppelstern mit $m_1 = 2$ mag, $m_2 = 3$ mag die totale scheinbare Helligkeit

$$m = -\log\left[10^{-\frac{2}{5}m_1} + 10^{-\frac{2}{5}m_2}\right]^{\frac{5}{2}} \approx 1.64 \text{ mag}$$

Aufgabe 7.4

Die Wellenlänge $\lambda_{\max}$ maximaler Emissionsleistungsdichte ergibt sich mit

$$\frac{dB_\lambda^W}{d\lambda} = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^7}\left[\frac{hc}{kT} - 5\lambda\right] \cdot e^{-\frac{hc}{\lambda kT}}$$

durch $\frac{dB_\lambda^W}{d\lambda}\big|_{\lambda_{\max}} = 0$ gemäß

$$\boxed{\lambda_{\max} = \frac{hc}{5kT}} \tag{0.1}$$

sprich die Wellenlänge maximaler Emission verhält sich umgekehrt proportional zu T. Insbesondere

$$B_\lambda^W(\lambda_{\max}) = 2\pi \cdot 5^5 \cdot \frac{(kT)^5}{h^4c^3} \cdot e^{-5} \tag{0.2}$$

das heißt die tatsächlich maximale Emissionsdichte hängt (in Wienscher Näherung) zur 5-ten Potenz von der Temperatur ab!

Vergleich mit Planckschen Strahlungsgesetz

Nach Planck hängt die Emissionsleistungsdichte eines schwarzen Strahlers gemäß

$$B_\lambda^P(\lambda) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{\underbrace{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}_{\frac{e^{-\frac{hc}{\lambda kT}}}{1-e^{-\frac{hc}{\lambda kT}}}}} \tag{0.3}$$

von λ, T ab. Aus (0.1) wird ersichtlich dass in einer Umgebung von $\lambda_{\max}$ ($|\Delta\lambda| \lesssim \lambda_{\max}/2$) gilt

$$\exp\left[-\frac{hc}{\lambda kT}\right]\Bigg|_{\lambda_{\max}+\Delta\lambda} = \exp\left[-\frac{1}{\frac{1}{5} + \frac{\Delta\lambda\cdot kT}{hc}}\right] \overset{\Delta\lambda\lesssim\lambda_{\max}/2}{\lesssim} \exp\left[-\frac{10}{3}\right] \approx 0.04 \ll 1$$

und daher die Näherung

$$B_\lambda^P(\lambda) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \cdot \underbrace{\frac{e^{-\frac{hc}{\lambda kT}}}{1 - e^{-\frac{hc}{\lambda kT}}}}_{\approx 1} \approx \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \cdot e^{-\frac{hc}{\lambda kT}} = B_\lambda^W(\lambda)$$

sehr gut ist. Der relative *Fehler* $\delta := (B_\lambda^P - B_\lambda^W)/B_\lambda^P$ ergibt sich als

$$\boxed{\delta(\lambda) = e^{-\frac{hc}{\lambda kT}}} \tag{0.4}$$

und insbesondere

$$\delta(\lambda_{\max}) \overset{(0.1)}{\approx} e^{-5} \lesssim 0.7\%$$

Aus

$$\delta(\lambda) = \Big(\underbrace{^{-\frac{hc}{\lambda_{\max}kT}}}_{e^{-5}}\Big)^{\frac{\lambda_{\max}}{\lambda}}$$

wird ersichtlich dass:

- Die Wiensche Näherung für kleinere Wellenlängen genauer wird.
- Der relative Fehler bleibt kleiner als $\delta_0 < 1$ genau dann wenn

$$\frac{\lambda}{\lambda_{\max}} < \frac{-5}{\ln \delta_0}$$

  Speziell für Maximalfehler von $\delta_0 = 10\%$ bzw. $\delta_0 = 1\%$ muss $\lambda/\lambda_{\max} \lesssim 2.2$ bzw. $\lambda/\lambda_{\max} \lesssim 1.1$ sein.

Aufgabe 7.5

Nach Stefan-Boltzmann beträgt die gesamte emmitierte Strahlungsleistung des menschlichen Körpers (Fläche A, Emissionskonstante ε, Temperatur T) etwa

$$E \approx A\varepsilon\sigma T^4 \tag{0.5}$$

Nach [1] besitzt Wasser (und somit näherungsweise der menschliche Körper) bei 38° C eine Emissionskonstante $\varepsilon \approx 0.67$. Schätzt man $A \approx 2\ \mathrm{m}^2$ und $T \approx 310$ K so erhält man

$$E \approx 7 \times 10^2\ \mathrm{W} \tag{0.6}$$

Bemerkung: In einem Tag emittiert ein Mensch also schätzungsweise ca.

$$E \cdot 1^{\mathrm{d}} \approx 6 \times 10^7\ \mathrm{J} \approx 1.4 \times 10^4\ \mathrm{Kcal}$$

was bei weitem die täglich durch Nahrung aufgenommene Energie übertrifft. Tatsächlich wird die Lücke durch die von der Umgebung aufgenommene Strahlungsenergie gefüllt!

Literatur

[1] *Table of Total Emissivity*, Monarch Instruments
http://www.monarchserver.com/TableofEmissivity.pdf

[2] , I. Ribas, C. Jordi, F. Vilardell, E.L. Fitzpatrick, R.W. Hilditch, F. Edward
Astrophysical Journal 635, L37-L40