Einführung in die Astronomie
FSU Jena - WS 2009/2010
Übungsserie 06 - Lösungen

Stilianos Louca

4. Januar 2010

Aufgabe 6.1

Nach dem 3. Keplerschen Gesetzt beträgt die große Hauptachse a_n der Neptun-Bahn (Periode T_n) um die Sonne ca.

$$a_n \approx a_e \cdot \sqrt[3]{\frac{T_n^2}{T_e^2}}$$

wobei a_e und T_e jeweils die große Hauptachse und Umlaufperiode der Erde um die Sonne seien. Die Sonne erscheint also von Neptun aus mit einem Winkeldurchmesser

$$D_n \approx D_e \cdot \frac{a_e}{a_n} = D_e \cdot \sqrt[3]{\frac{T_e^2}{T_n^2}} \approx 1' \tag{0.1}$$

wobei $D_e \overset{(4.1)}{\approx} 32'$ der Winkeldurchmesser der Sonne von der Erde aus sei. Analog zu Aufgabe (1.3) ergibt sich für das menschliche Auge eine beugungsbedingte Auflösungsgrenze von ca.

$$d_{\text{min,beug}} \approx 21''$$

Der kleinste Abstand zwischen den Retina-Zäpfchen beträgt jedoch knapp 4 μm, so dass sich ein kleinster auflösbarer Winkel von ca. $d_{\text{min}} \approx 1'$ ergibt[1]. Die Sonne erscheint also gerade mal als ein Punkt.

Aufgabe 6.2

Ist $T_p \approx 248^{\text{j}}$ die Umlaufperiode von Pluto, $T_e \approx 1^{\text{j}}$ bzw. a_e die Umlaufperiode bzw. die große Hauptachse der Erde, so besitzt Pluto nach Kepler die große Hauptachse

$$a_p \approx a_e \cdot \left(\frac{T_p}{T_e}\right)^{\frac{2}{3}} \approx 39.5 \text{ AU}$$

Sein Sonnen-Abstand am Perihel entsprach also

$$d_{1988} = d_p^{\text{per}} = a_p \cdot (1 - e_p) \approx 29.6 \text{ AU}$$

mit $e_p \approx 1/4$ als Plutos Exzentrizität. Entsprechend beträgt sein Aphelabstand

$$d_p^{\text{aph}} = a_p \cdot (1 + e_p) \approx 49.4 \text{ AU}$$

Nimmt man an dass der Polarwinkel φ (Pol: Mittelpunkt, Referenzachse große Hauptachse Richtung Sonne, vgl. Abb. (0.1)) sich linear mit der Zeit verändert , so erreicht dieser nach $t = 2100^{\text{j}} - 1988^{\text{j}} = 112^{\text{j}}$ den Wert

$$\varphi_{2100} = \frac{t}{T_p} \cdot 2\pi$$

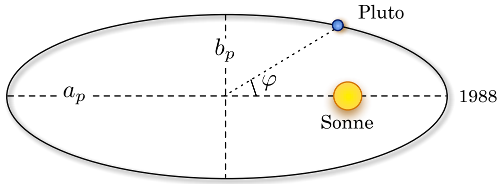

Abbildung 0.1: Zur Aufgabe 6.2: Ellipsenbahn Plutos um die Sonne.

Aus Abbildung (0.1) ergibt sich an dem Zeitpunkt der Abstand zur Sonne gemäß

$$d_{2100} = \sqrt{a_p^2(\cos\varphi_{2100} - e_p)^2 + b_p^2 \sin^2\varphi_{2100}} = a_p\left(1 - e_p \cdot \cos\varphi_{2100}\right)$$

$$\approx 48.9 \text{ AU}$$

Seit seiner Entdeckung 1930, sprich im laufe von $2009 - 1930 = 79$ Jahren, hat sich φ um

$$\Delta\varphi \approx \frac{79^{\text{j}}}{T_p} \approx 114.7°$$

um den Bahnmittelpunkt bewegt.

Vergleich mit Neptun

Für Neptun ergibt sich analog die große Hauptachse

$$a_n \approx a_e \cdot \left(\frac{T_n}{T_e}\right)^{\frac{2}{3}} \approx 30.1 \text{ AU}$$

Sein Perihelabstand d_n^{per} und Aphelabstand d_n^{aph} betragen demnach

$$d_n^{\text{per}} = a_n(1 - e_n) \approx 29.9 \text{ AU} \quad , \quad d_n^{\text{aph}} = a_n(1 + e_n) \approx 30.3 \text{ AU}$$

Neptun bewegt sich also auf einer nahezu kreisförmigen Bahn um die Sonne mit *konstantem* Abstand ≈ 30.1 AU. Würden sich die beiden Planeten in der gleichen Ebene bewegen, so könnten sie im Prinzip kollidieren, da

$$d_p^{\text{per}} < d_n^{\text{per}} < d_n^{\text{aph}} < d_p^{\text{aph}}$$

sprich die Bahnen schneiden sich an zwei Punkten (vgl. Abb. (0.2)).

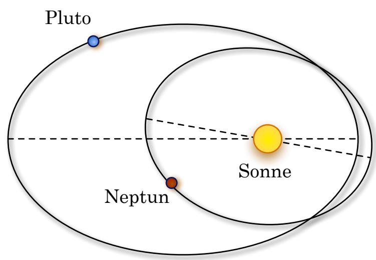

Abbildung 0.2: Zur Aufgabe 6.2: Plutos & Neptuns Bahnen im Vergleich, im Falle gleicher Bahnebenen.

In Wirklichkeit jedoch besitzen die beiden Planetenbahnen unterschiedliche Inklinationen und schneiden sich tatsächlich nicht.

Aufgabe 6.3

Abbildung (0.3) illustriert einen Hohmann-Orbit von Erde zu Mars, unter Annahme Kreisförmiger Erd- und Mars-Bahnen mit jeweils Radius a_e und a_m.

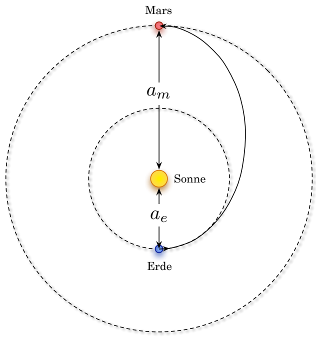

Abbildung 0.3: Zur Aufgabe 6.3: Hohmann-Orbit von Erde zum Mars.

Per Konstruktion stellt der Hohmann-Orbit die Hälfte einer elliptischen Bahn mit großer Halbachse

$$a_h = (a_m + a_e)/2$$

um die Sonne dar. Nach Kepler entspricht dies einer Dauer von ca.

$$T_h \approx \frac{1^{\mathrm{j}}}{2}\left(\frac{a_h}{a_e}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{1^{\mathrm{j}}}{2}\left(\frac{a_m + a_e}{2a_e}\right)^{\frac{3}{2}} \approx 0.62^{\mathrm{j}}$$

Aufgabe 6.4

Nach Kepler beträgt die große Hauptachse Plutos ca.

$$a_p \approx a_e \cdot \sqrt[3]{\frac{T_p^2}{T_e^2}} \tag{0.2}$$

wobei $T_p \approx 248\ a$ seine Umlaufperiode sei. Besitzt die Sonne auf der Erde eine Flussdichte $F_{\mathrm{sun,e}}$, so ergibt sich ihre Flussdichte $F_{\mathrm{sun,p}}$ auf Pluto gemäß

$$F_{\mathrm{sun,p}} \approx \left(\frac{a_e}{a_p}\right)^2 F_{\mathrm{sun,e}} \tag{0.3}$$

(Atmosphären vernachlässigt) was einem scheinbaren Sonnen-Helligkeitsunterschied Δm zwischen Pluto und Erde von

$$\Delta m := m_{\mathrm{sun,p}} - m_{\mathrm{sun,e}} = -\log\left(\frac{F_{\mathrm{sun,p}}}{F_{\mathrm{sun,e}}}\right)^{5/2} \overset{(0.2)\&(0.3)}{\approx} \frac{10}{3}\log\left(\frac{T_p}{T_e}\right) \approx 7.98\ \mathrm{mag}$$

entspricht. Dagegen beträgt der Helligkeitsunterschied zwischen Vollmond und Tag auf Erden $\Delta m' = 14$ mag, sprich Vollmond auf Erden ist noch dunkler als Tag auf Pluto!

Aufgabe 6.5

Die Helligkeitsschwelle des menschlichen Auges beträgt ca. $m_0 \approx 6$ mag. Beträgt die scheinbare Helligkeit der Sonne auf Erden $m_{\mathrm{sun,e}} \approx -26.7$ mag, so beträgt sie im Abstand d

$$m_{\mathrm{sun}}(d) \approx m_{\mathrm{sun,e}} - 2.5 \cdot \log\left(\frac{\mathrm{AU}}{d}\right)^2$$

Die Sonne wäre noch halbwegs sichtbar für $m_{\mathrm{sun}}(d) \lesssim m_0$, sprich

$$d \lesssim \mathrm{AU} \cdot 10^{\frac{1}{5}(m_0 - m_{\mathrm{sun,e}})} \approx 3.5 \times 10^6 \ \mathrm{AU}$$

Literatur

[1] *Physik für Ingenieure*, Dobrinski, Krakau, Vogel
B.G. Teubner, 1984