Einführung in die Astronomie
FSU Jena - WS 2009/2010
Übungsserie 03 - Lösungen

Stilianos Louca

24. November 2009

Aufgabe 3.1

Mit

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\theta \\ \sin\psi\cos\theta\cos\chi + \sin\theta\sin\chi \\ \sin\theta\cos\chi - \sin\psi\cos\theta\sin\chi \end{pmatrix}$$

ergeben sich die Beziehungen

$$\begin{aligned} \cos\psi'\cos\theta' &= \cos\psi\cos\theta \\ \sin\psi'\cos\theta' &= \sin\psi\cos\theta\cos\chi + \sin\theta\sin\chi \\ \sin\theta' &= \sin\theta\cos\chi - \sin\psi\cos\theta\sin\chi \end{aligned}$$

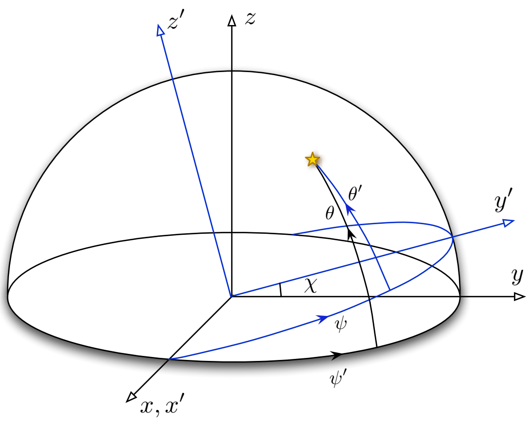

Abbildung 0.1: Zur Aufgabe 3.1: Transformation zwischen zu einander geneigten Kugelkoordinaten.

Durch Identifizierung $\psi' \to \lambda$ (ekliptikale Länge), $\theta' \to \beta$ (ekliptikale Breite), $\psi \to \alpha$ (Rektaszension), $\theta \to \delta$ (Deklination) und $\chi \to \varepsilon$ (Ekliptikschiefe) erhält man den Zusammenhang zwischen Ekliptikalem und Äquatorialem System:

$$\begin{aligned} \cos\lambda\cos\beta &= \cos\alpha\cos\delta \\ \sin\lambda\cos\beta &= \sin\alpha\cos\delta\cos\varepsilon + \sin\delta\sin\varepsilon \\ \sin\beta &= \sin\delta\cos\varepsilon - \sin\alpha\cos\delta\sin\varepsilon \end{aligned}$$

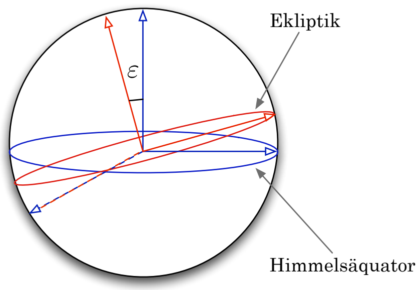

Abbildung 0.2: Zur Aufgabe 3.1: Ekliptikal- & Äquatorialsystem auf der Himmelskugel.

Aufgabe 3.2

Gegen 12^{h} Mittags ($\approx$ mittlere Sonnenzeit) besitzen Beobachter und Sonne die gleiche Rektaszension. Insbesondere ist die Rektaszension der Sonne gleich der Sternzeit, nämlich 12^{h} (vgl. Abb. (0.3)). Auf der Nordhalbkugel beginnt dabei der Herbst.

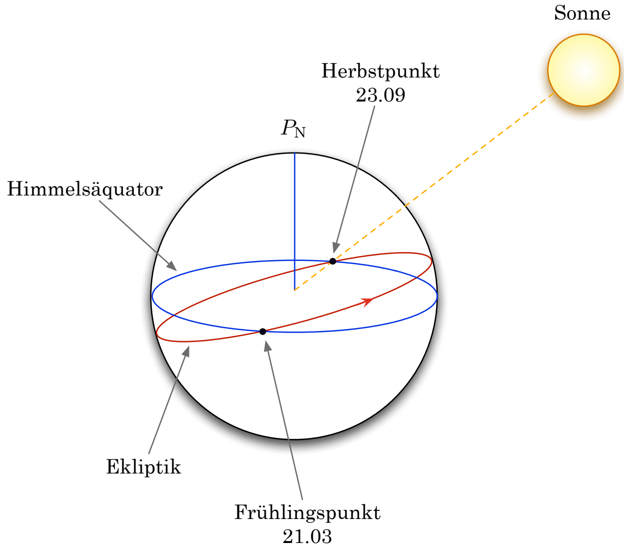

Abbildung 0.3: Zur Aufgabe 3.2: Position der Sonne zur Mittagszeit bei einer Sternzeit von 12^{h}.

Aufgabe 3.3

Totale Sonnenfinsternis liegt genau dann vor, wenn Erdzentrum, Mond & Sonne auf der gleichen geraden liegen, also insbesondere Mond, Sonne & Mondschatten gleiche Deklination und Rektaszension besitzen (vgl. Abb. (0.4)). Ist λ die ekliptikale Länge der Sonne zum gegebenen Zeitpunkt, so entspricht dies einer Deklination

$$\delta = \arcsin\left(\sin\varepsilon \sin\lambda\right)$$

wobei $\varepsilon \approx 23.44°$ die Ekliptikschiefe sei (vgl. Aufgabe 2.4). Am *Herbstanfang* (Herbstpunkt, 23.09) besitzt die Sonne eine ekliptische Länge von

$$\lambda_{23.09} \approx 12^{\mathrm{h}}$$

und somit eine Mond-Deklination von

$$\boxed{\delta_{01.09} \approx 0°}$$

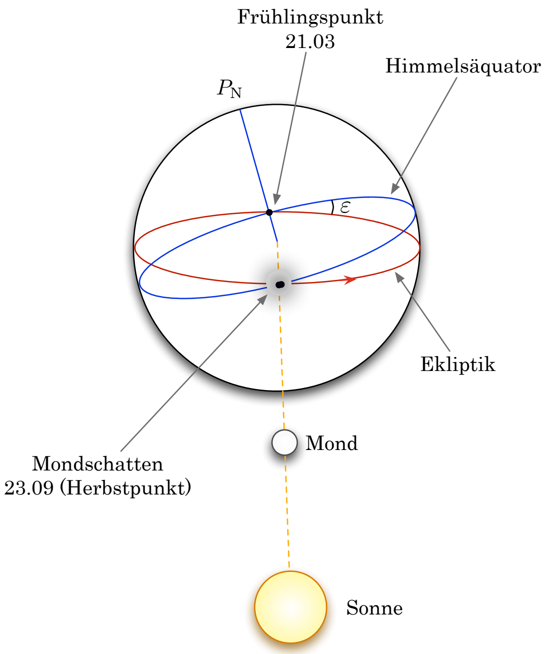

Abbildung 0.4: Zur Aufgabe 3.3: Deklination des Mondes bei Sonnenfinsternis zu Herbstanfang.

Aufgabe 3.4

Eine totale Sonnenfinsternis wird genau dann *beobachtet*, wenn Sonne, Mond, Beobachter und Erdmittelpunkt möglichst auf einer Geraden liegen. Eine Sternzeit von 6^{h} bedeutet dabei dass der Leitpunkt (am Himmelsäquator) um 90° östlich des Frühlingspunktes liegt. Daher muss der Beobachter auf dem Großkreis stehen, dessen Ebene Nordpol, Südpol & Sommer- bzw. Winterpunkt enthält. Insbesondere ergeben sich für den Beobachter zwei Möglichkeiten: Sommer- & Winterpunkt.

Doch würde ein Standpunkt am Winterpunkt den *falschen* Leitpunkt ergeben. Demnach muss Beobachtungsstandpunkt (bzw. Sonnenstand) & Sommerpunkt gleich sein. Dies ist nur im Sommerhalbjahr möglich (vgl. Abb. (0.5)).

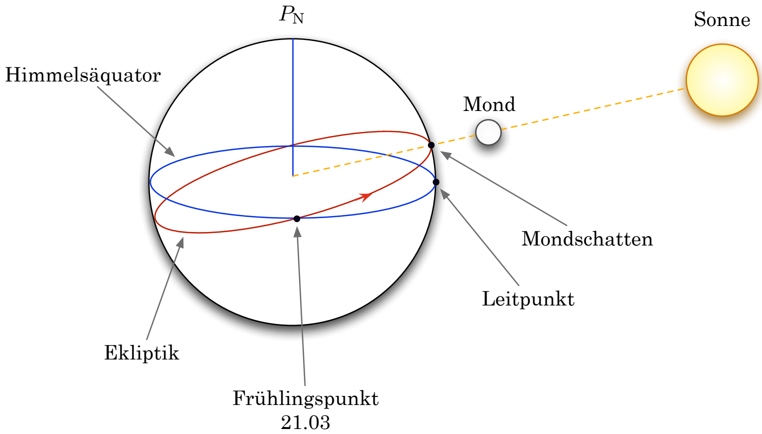

Abbildung 0.5: Zur Aufgabe 3.4: Beobachtung einer totalen Sonnenfinsternis bei Sternzeit 6^{h}.

Aufgabe 3.5

Die (variierende) Abweichung η der mittleren Sonnenzeit (konstanter Ablauf) und der wahren Sonnenzeit (Stundenwinkel der Sonne) kommt im wesentlichen durch folgende zwei Effekte zustande:

(i) Variation der Erd-(bzw. Sonnen-)Bahngeschwindigkeit auf deren Ellipsenbahn aufgrund des variierenden Erd-Sonne Abstandes.

(ii) Verlauf der Sonne auf einem anderen Großkreis als dem Äquatorkreis.

Dabei wird die mittlere Sonne wie folgt definiert:

> Zunächst sei ein fiktives, sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit in Richtung Osten, auf der Ekliptik bewegtes Gestirn betrachtet, das mit der Sonne am Perihel- bzw. Aphel übereinstimmt. Die *mittlere Sonne* ist nun das fiktive Gestirn, dass sich am Himmelsäquator in gleicher Richtung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit bewegt, und an den Äquinoktien[1] mit dem ersteren Gestirn übereinstimmt.

Wäre die Erde auf einer Kreisbahn, so würde zwar die Bahngeschwindigkeit der Sonne auf der Ekliptik konstant (erstes fiktives Gestirn = Sonne), doch deren Stundenwinkel würde sich aufgrund der Ekliptikschiefe stets ungleichmäßig ändern. Nicht desto trotz, hätten Sonne auf der Ellipse bzw. mittlere Sonne auf dem Äquator gleiche Winkelgeschwindigkeit. Aus geometrischen Gründen müssen daher wahre Sonnenzeit τ und mittlere Sonnenzeit τ_{m} nicht nur an den Äquinoktien sondern auch an den Sonnenwenden[2] übereinstimmen (jeweils im 90°-Takt). Da die Zeitgleichung $\eta := \tau - \tau_{\text{m}}$ sowieso für feste Beobachter definiert ist, ergibt sich η einfach aus der Differenz der Rektaszensionen $\eta = \alpha_{\text{m}} - \alpha$ der beiden Sonnen.

Aus Symmetriegründen, wiederholt sich der Verlauf von η nach Frühlings- bzw. Herbstpunkt, das heißt $\eta(\text{SP} + x) = \eta(\text{HP} + x)$. Wegen

$$\eta(t) = \int_0^x \dot{\eta}(t)\ dt$$

und

$$0 = \eta(\text{SP}) = \eta(\text{SP} - x) + \int_{\text{SP}-x}^{\text{SP}} \dot{\eta}(t)\ dt \tag{0.1}$$

[1] Frühlingspunkt (21.03) & Herbstpunkt (23.09).
[2] Sommerpunkt SP (21.06) & Winterpunkt WP (21.12).

folgt

$$\eta(\mathrm{SP}+x) = \int\limits_{\mathrm{SP}}^{\mathrm{SP}+x} \dot{\eta}(t)\ dt = \int\limits_{0}^{x} \underbrace{\dot{\eta}(\mathrm{SP}+t)}_{\dot{\eta}(\mathrm{SP}-t)}\ dt = \int\limits_{\mathrm{SP}-x}^{\mathrm{SP}} \dot{\eta}(t)\ dt \overset{(0.1)}{=} -\eta(\mathrm{SP}-x)$$

das heißt η ists ungerade bzgl. des Sommerpunktes SP. Es genügt also den Verlauf von η (Zeitgleichung) im ersten viertel Jahr zu bestimmen.

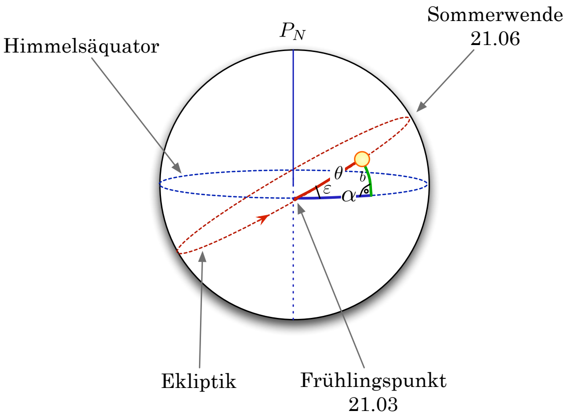

Abbildung 0.6: Zur Aufgabe 3.5: Zusammenhang zwischen wahrer & mittlerer Sonnenzeit.

Aus Abb. (0.6) ist abzulesen[**?**]:

$$\left.\begin{aligned} \sin b &= \sin\varepsilon \sin\theta \\ \sin\alpha &= \tan b \cot\varepsilon \end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha(\theta) = \arcsin\left[\frac{\sin\theta\cos\varepsilon}{\sqrt{1-\sin^2\varepsilon\sin^2\theta}}\right] \quad , \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \tag{0.2}$$

wobei $\varepsilon \approx 23.44°$ die Ekliptikschiefe, θ die Winkelposition der Sonne auf der Ekliptik und α deren Rektaszension (wahre Sonnenrektaszension) sei. Da θ und mittlere Sonnenrektaszension α_{m} in Takt sind (gleiche Winkelgeschwindigkeit), ergibt sich die Zeitgleichung gemäß

$$\eta(\alpha_{\mathrm{m}}) = \alpha_{\mathrm{m}} - \underbrace{\alpha(\alpha_{\mathrm{m}})}_{\alpha(\theta)} = \begin{cases} \alpha_{\mathrm{m}} - \alpha(\alpha_{\mathrm{m}}) & : 0^{\mathrm{h}} \leq \alpha_{\mathrm{m}} \leq 6^{\mathrm{h}} \\ -\eta(12^{\mathrm{h}} - \alpha_{\mathrm{m}}) & : 6^{\mathrm{h}} \leq \alpha_{\mathrm{m}} \leq 12^{\mathrm{h}} \\ \eta(\alpha_{\mathrm{m}} - 12^{\mathrm{h}}) & : 12^{\mathrm{h}} \leq \alpha_{\mathrm{m}} \leq 18^{\mathrm{h}} \\ -\eta(24^{\mathrm{h}} - \alpha_{\mathrm{m}}) & : 18^{\mathrm{h}} \leq \alpha_{\mathrm{m}} \leq 24^{\mathrm{h}} \end{cases} \tag{0.3}$$

und hat den Verlauf, wie in Abb. (0.7) illustriert.

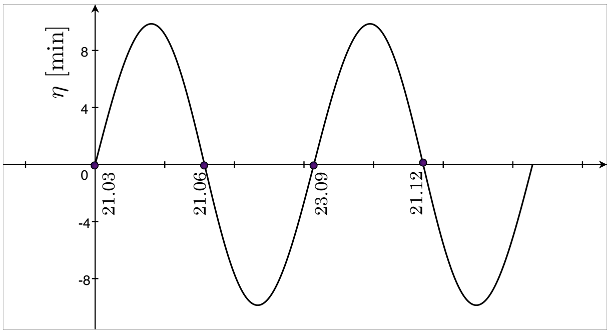

Abbildung 0.7: Zur Aufgabe 3.5: Verlauf der Zeitgleichung $\eta = \tau - \tau_{\mathrm{m}}$.