Einführung in die Astronomie
FSU Jena - WS 2009/2010
Übungsserie 02 - Lösungen

Stilianos Louca

17. November 2009

Konventionen

Für Winkel ϑ bezeichne $\vartheta^c := 90^\circ - \vartheta$ den zu ϑ *komplementären Winkel.*

Aufgabe 2.1

Streng genommen liegt Neumond genau dann vor wenn Mond zwischen Erde und Sonne liegt, sprich, seine Rektaszension α ist gleich die der Sonne. Am 21.12 befindet sich die Sonne bei Rektaszension $\alpha_1 = 18^{\mathrm{h}}$, am 21.03 genau über dem Frühlingspunkt, besitzt also Rektaszension 0^{h}. Daher ergibt sich unter Annahme einer hinreichend konstanten Winkelgeschwindigkeit ω der Sonne auf der Ekliptik[1] von $\omega \approx 90^\circ/90^{\mathrm{d}} = 1^\circ/\mathrm{d}$.

Gegeben sei nun eine Winkeldifferenz $0 < \vartheta < 90^\circ$ der Sonne vom 21.12-Punkt entlang der Ekliptik. Gesucht dazu sei deren entsprechende Rektaszension $\alpha = 18^{\mathrm{h}} + \mu$. Aus Abb. (0.1) ist abzulesen

$$\cos\eta = \cos\varepsilon\cos\vartheta \tag{0.1}$$

(Seitenkosinussatz) wobei $\varepsilon \approx 23.44^\circ$ die Ekliptikschiefe ist. Ferner

$$\cos\vartheta = \cos\varepsilon\cos\eta + \sin\varepsilon\sin\eta\cos\nu \quad\Rightarrow\quad \cos\nu = \frac{\cos\vartheta - \cos\varepsilon\cos\eta}{\sin\varepsilon\sin\eta} \overset{(0.1)}{=} \frac{\sin\varepsilon\cos\vartheta}{\sqrt{1-\cos^2\varepsilon\cos^2\vartheta}} \tag{0.2}$$

(Seitenkosinussatz) und schließlich

$$\left.\begin{aligned} \sin\mu &= \tfrac{\tan b}{\tan\nu^c} \\ \sin b &= \sin\nu^c\sin\eta \end{aligned}\right\} \Rightarrow\ \sin\mu = \frac{\sin\eta\cos\nu^c}{\sqrt{1-\sin^2\nu^c\sin^2\eta}} \overset{(0.1)\&(0.2)}{=} \frac{\sin\vartheta}{\sqrt{1-\sin^2\varepsilon\cos^2\vartheta}}$$

sprich

$$\mu = \arcsin\left[\frac{\sin\vartheta}{\sqrt{1-\sin^2\varepsilon\cos^2\vartheta}}\right]$$

[1] Die Schwankung des Erde-Sonne-Abstandes zwischen 1.47×10^8 km und 1.52×10^8 km bewirkt eine Schwankung der Winkelgeschwindigkeit in der Größenordnung von 6 %.

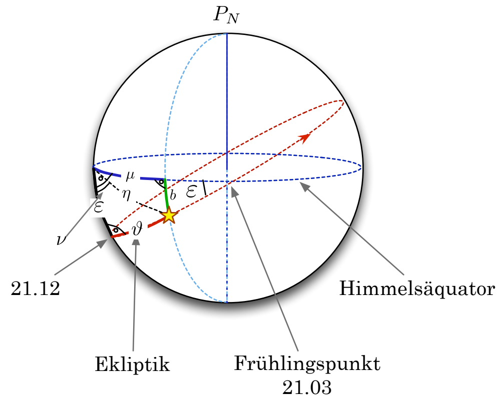

Abbildung 0.1: Zur *Bewegung* der Sonne auf der Ekliptik und deren Rektaszension.

Für den 5. Februar ergibt sich

$$\vartheta \approx (1^\circ/\mathrm{d}) \cdot 46^{\mathrm{d}} = 3.07^{\mathrm{h}h}$$

und somit eine Rektaszension von

$$\boxed{\alpha = 18^{\mathrm{h}} + \mu(\vartheta) \approx 21.23^{\mathrm{h}}}$$

Aufgabe 2.2

Gegeben seien die Deklination δ ($\delta^c := 90^\circ - \delta$) und Stundenwinkel $\tau < 12^{\mathrm{h}}$ eines Gestirns im Horizontsystem der geographischen Breite $\varphi > 0$ ($\varphi^c := 90^\circ - \varphi$), dann ist seine Höhe h ($h^c := 90^\circ - h$) gegeben durch den sphärischen Seitenkosinussatz

$$\underbrace{\cos h^c}_{\sin h} = \underbrace{\cos \delta^c \cos \varphi^c + \sin \delta^c \sin \varphi^c \cos \tau}_{\sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos \tau}$$

(vgl. Abb. (0.2)). Eine Größtabschätzung von h entspricht einer Größtabschätzung von $\cos h^c$, mit $\cos \tau$ maximal:

$$\sup_{\delta_{\min} \leq \delta \leq \delta_{\max}} \cos h^c = \sup_{\delta_{\min} \leq \delta \leq \delta_{\max}} \underbrace{(\sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi)}_{\cos(\delta - \varphi)}$$

das heißt $\underbrace{|(h_{\max})^c|}_{(h_{\max})^c} = |\delta - \varphi|_{\min}$, also

$$h_{\max} = 90^\circ - |\delta - \varphi|_{\min}$$

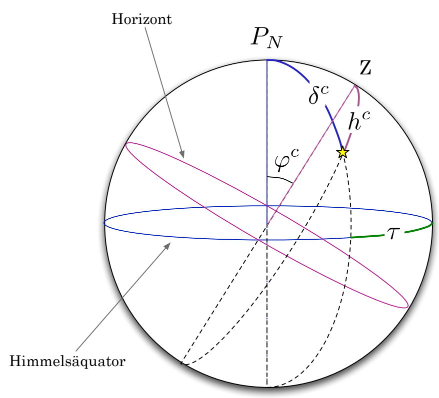

Abbildung 0.2: Zur Aufgabe 2.2: Transformation von Deklination δ (Äquatorsystem) in Höhe h (Horizontsystem).

Bekanntlich präzediert die Mondebene bzgl. der Ekliptik im Winkelbereich von etwa $\pm 5°$. Bei einem Breitengrad $\gtrsim 29°$ entspricht eine maximale Monddeklination $\delta_{\max}$ auch einer maximalen Mondhöhe $h_{\max}$. Diese wird erreicht wenn Mondbahn-, Äquator- und Ekliptik-Ebene um die gleiche Achse und die Mondebene gerade $23.44 + 5°$ zur Äquatorebene geneigt sind (vgl. Abb. (0.3)), sprich der Mond eine maximale Deklination 28.44° erreicht. Mit $\varphi_{\text{Jena}} = 50°55'$ ergibt sich so eine Größtabschätzung von

$$\boxed{h_{\max} \approx 67°}$$

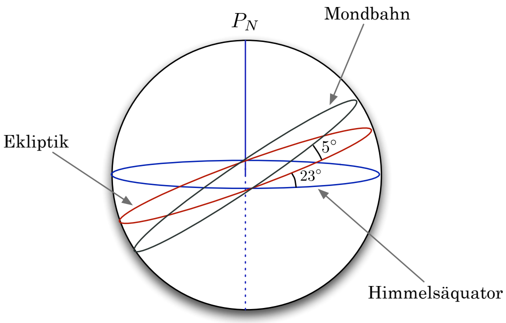

Abbildung 0.3: Zur Aufgabe 2.2: Himmelsäquator, Ekliptik & Mondbahnebene.

Aufgabe 2.3

Betrachten zunächst den Winterfall, sprich der Nordpol ist von der Sonne weiter entfernt als er Südpol. Vollmond liegt genau dann vor, wenn Erde zwischen Sonne & Mond steht. Ein sich in der nördlichen Halbkugel, im nächtlichen Teil befindender Beobachter besitzt einen Horizont ähnlich wie in Abb. (0.4). insbesondere ergibt sich durch die Neigung der Mondbahn zur Äquatorebene eine Annäherung des Mond-Zeniths zum Lot der Beobachters (höher).

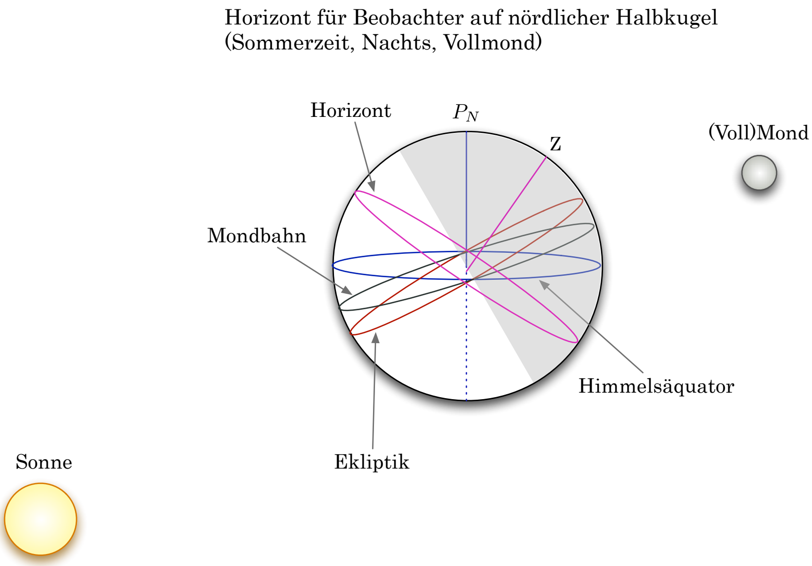

Abbildung 0.4: Zur Aufgabe 2.3: Typische Position von Sonne & Mond im Winter (Nacht) und Horizont eines sich auf der nördlichen Halbkugel befindenden Beobachters.

Der Sommer-Fall kann mit Hilfe von Abb. (0.5) verstanden werden, indem man sich durch ähnliche Überlegungen klarmacht dass der Mond-Zenith sich in Richtung Horizont versetzt.

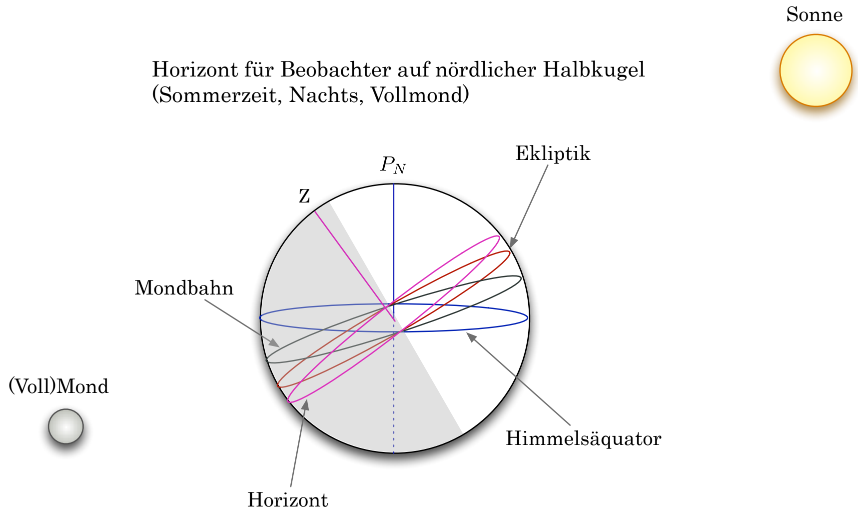

Abbildung 0.5: Zur Aufgabe 2.3: Typische Position von Sonne & Mond im Sommer (Nacht) und Horizont eines sich auf der nördlichen Halbkugel befindenden Beobachters.

Aufgrund eines längeren optischen Weges durch die Erdatmosphäre im Sommer-Fall, spielt die stärkere Streuung kurzwelliger Komponenten des am Mond reflektierten Lichtes (e.g. blau, violett), eine erheblichere Rolle bei dessen Farberscheinung. Entsprechend wirkt die Atmosphäre im Falle einer niedrigen Mondlage als *Sammellinse*, was in eine Vergrößerung des Beobachtungswinkels des Mondes resultiert.

Aufgabe 2.4

Gegeben sei zunächst die Deklination δ der Sonne am betrachteten Tag. Dann erreicht die Sonne ihre maximale bzw. minimale Höhe h_{max} bzw. h_{min} wenn Sonne, Erdrotationsachse und Beobachter in der gleichen Ebene liegen. Beide Fäll sind in Abb. (0.6) dargestellt, aus der Abzulesen ist

$$h_{\text{max}} = 90° - |\varphi - \delta|$$
$$h_{\text{min}} = |\delta + \varphi| - 90°$$

Beachte dass obige Formeln sowohl für Beobachter auf Nord- ($\varphi \geq 0$) als auch Südkugel ($\varphi \leq 0$), bzw. sowohl für $\delta \geq 0$ als auch $\delta \leq 0$ gelten.

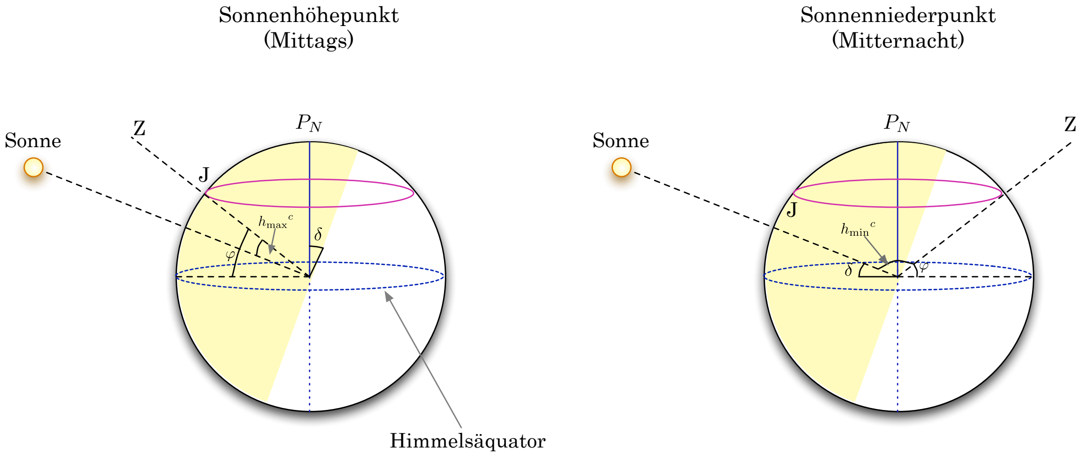

Abbildung 0.6: Zur Aufgabe 2.4: Maximale & minimale Sonnenhöhe bei einer Sonnendeklination δ, beobachtet von einer geographischen Breite φ (Sommerzeit).

Zu bestimmen wäre nun die Deklination δ der Sonne an den vorgegebenen Tagen 22.06 & 23.12. Aus Abb. (0.7) ist abzulesen[1]

$$\sin\delta = \sin\varepsilon \sin\vartheta$$

wobei $\varepsilon \approx 23.44°$ die Ekliptikschiefe und ϑ die Ekliptik-Phase (gemessen vom Frühlingspunkt) der Sonne sei. Beachte dass obige Formel tatsächlich für $\vartheta \in [0^{\mathrm{h}}, 24^{\mathrm{h}}]$ gilt.

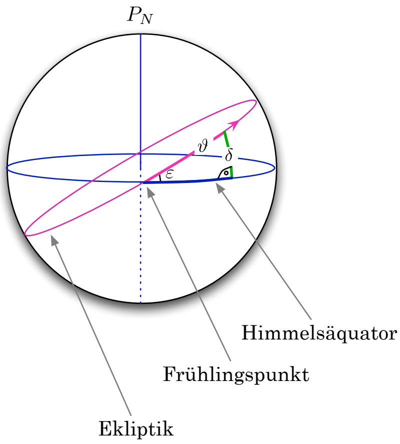

Abbildung 0.7: Zur Aufgabe 2.4: Deklination der Sonne bei gegebener Ekliptik-Phase ϑ.

Tatsache ist, dass ϑ am 21.3, 21.06, 23.9 und 21.12 jeweils die Werte $\vartheta = 0^{\mathrm{h}},\ 6^{\mathrm{h}},\ 12^{\mathrm{h}}$ und 18^{h} annimmt. Unter Annahme einer nahezu konstanten Winkelgeschwindigkeit $\dot{\vartheta}$: const ergibt sich für den 22.06 und 23.12 jeweils $\vartheta_{22.06} \approx 6.06^{\mathrm{h}}$ und $\vartheta_{23.12} \approx 18.13^{\mathrm{h}}$, bzw die Deklinationen

$$\delta_{22.06} \approx 23.44° \quad , \quad \delta_{23.12} \approx -23.43°$$

	$h_{\max}$	$h_{\min}$
	Jena	
22.06	62.52°	−15.64°
23.12	15.65°	−62.51°
	Tromso	
22.06	43.79°	3.09°
23.12	−3.08°	−43.78°

Tabelle 0.1: Höhe- & Niederpunkte der Sonne in Jena & Tromso, um den 22.06 und 23.12.

Zu erkennen ist, dass am 22.06 in Tromso die Sonne nicht untergeht, am 23.12 nicht aufgeht. Dies lieht an der Tatsache, dass Tromso nördlich des Nordpolarkreises ($\varphi = 66.56°$) liegt.

Aufgabe 2.5

Die kürzeste Tag-Dauer liegt auf der nördlichen Halbkugel genau dann vor, wenn die Sonne auf der Himmelskugel (Äquatorsystem) die kleinste Deklination (< 0) besitzt. In dem Fall entsprich der Winkel zwischen der, die Schattengrenze (Großkreis) enthaltenden, Ebene und der Erdrotationsachse genau der Ekliptikschiefe $\varepsilon \approx 23.44°$.

Abbildung (0.8) illustriert den Einfluss der geographischen Lage (Breite φ) & Ekliptikschiefe ε auf die Tag-Dauer in diesem Fall.

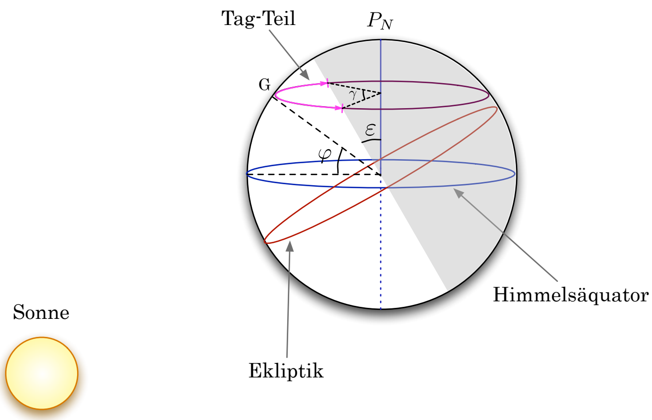

Abbildung 0.8: Zur Aufgabe 2.5: Tag/Nacht Zyklus auf der nördlichen Halbkugel im Winter. Die Dauer eines Tages am Ort G entspricht dem Winkel γ.

Zur Berechnung der Tag-Dauer γ, sei betrachtet die Abbildung (0.9). Mit

$$\begin{aligned} \overline{OC} &= \sin\varphi \\ \overline{AC} &= \overline{CG} = \cos\varphi \\ \overline{CD} &= \overline{OC}\tan\varepsilon \\ \cos\frac{\gamma}{2} &= \overline{CD}/\overline{CA} \end{aligned}$$

folgt

$$\gamma = 2\arccos\left(\tan\varphi \cdot \tan\varepsilon\right)$$

solange $\tan\varphi \cdot \tan\varepsilon \leq 1$ (andernfalls wäre $\varphi > 90° - \varepsilon$, sprich G befände sich stets im Schatten).

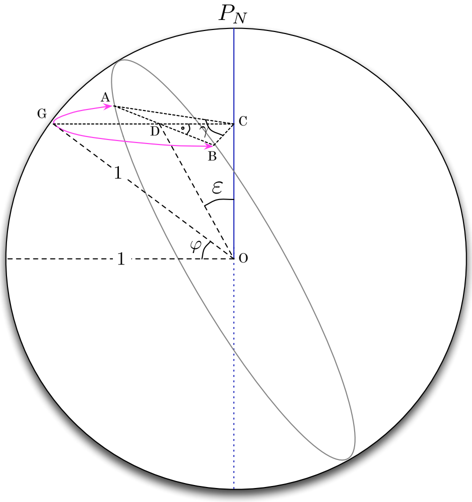

Abbildung 0.9: Zur Berechnung des Winkels γ (Tag-Dauer) am Ort G bei einer Ekliptikschiefe ε.

Im Falle von Jena ($\varphi \approx 55°55'$) ergibt sich $\gamma \approx 115.5°$, entspricht also einer Tag-Dauer von ca. 7.70^{h}.

Aufgabe 2.6

Die Rektaszension α_m der mittleren Sonne ist gegeben durch

$$\alpha_m \approx \frac{260}{365} \cdot 24^{\mathrm{h}} + \underbrace{\eta_{21.03}}_{-0.124^{\mathrm{h}}} \approx 16.97^{\mathrm{h}}$$

Aus Abb. (0.10) ist ähnlich zu Aufgabe 2.5 die Dauer T_{s} der Sichtbarkeitsphase von Wega am Ort J (Nordkugel) abzulesen:

$$T_{\mathrm{s}} = 24^{\mathrm{h}} - 2 \arccos\left(\tan\varphi \cdot \tan\delta\right) \approx 22.88^{\mathrm{h}}$$

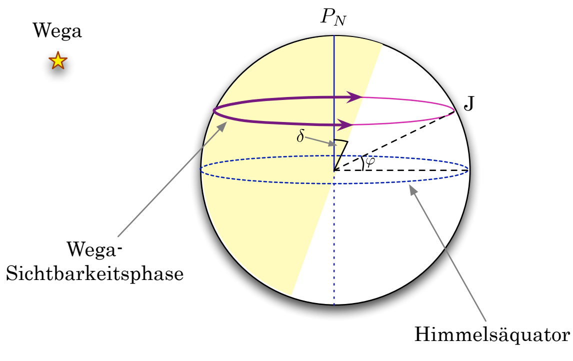

Abbildung 0.10: Zur Sichtbarkeitsphase von Wega an einem bestimmten Ort J auf der Nordkugel.

Die exakte Sichtbarkeit-Zeitspanne ergibt sich unter Beachtung der Rektaszension der Sonne an dem Tag. Aus Abb. (0.11) ist abzulesen, dass zum zeitlichen Mittelpunkt der Wega-Sichtbarkeitsphase, die mittlere Sonne bzgl. des Beobachters J um den Winkel $\alpha_{\mathrm{wega}} - \alpha_m \approx 1.65^{\mathrm{h}}$ westlich liegt, die mittlere Sonnenzeit beträgt also $\tau_m \approx 13:38$ Uhr. Unter Beachtung der Zeitzone[2] entspricht dies einer Urzeit $13:52$.

[2] In Greenwich stimmt die Urzeit mit der mittleren Sonnenzeit überein, das heißt die Urzeit t am (östlichen) Längengrad l, Zeitzone k ergibt sich aus der mittleren Sonnenzeit τ_m gemäß $t = \tau_m - l + k$.

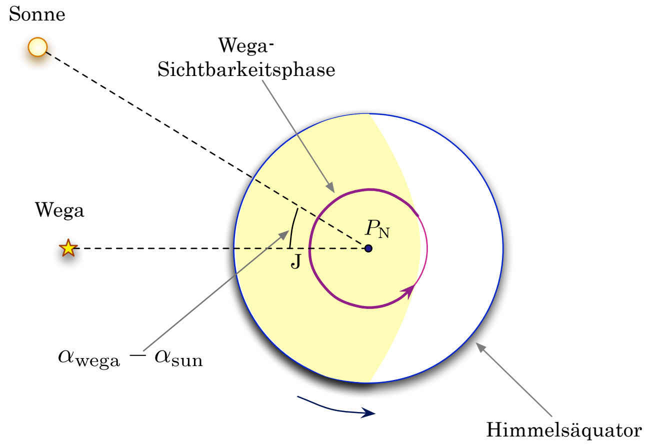

Abbildung 0.11: Zur Sichtbarkeitsphase von Wega an einem bestimmten Ort J auf der Nordkugel. Der zeitliche Mittelpunkt (*Urzeit*) der Sichtbarkeitsphase wird durch die momentane *Position* der Sonne bestimmt.

Dementsprechend ergibt sich der Sichtbarkeit-Zeitraum als

$$\boxed{02:26 - 01:19}$$

Literatur

[1] *Taschenbuch Mathematischer Formeln*, H.J. Bartsch
Fachbuchverlag Leipzig, 2004