Differentialgeometrie auf Mannigfaltigkeiten
FSU Jena - WS 07/08
Serie 05 - Lösungen

Stilianos Louca

17. April 2009

Aufgabe 1

a) Wir zeigen die 3 Eigenschaften einer Metrik

- Symmetrie
$$g(y_1, y_2) = \underbrace{\tilde{g}}_{:=g_1}(df_x(y_1), df_x(y_2)) \stackrel{*}{=} \tilde{g}(df_x(y_2), df_x(y_1)) = g(y_2, y_1) \quad (*) : \tilde{g}\ Metrik$$

- Bilinearität
$$g(\lambda y_1 + \mu x_1, y_1) = \tilde{g}\left(df_x(\lambda y_1 + \mu x_1), df_x(y_2)\right) = \tilde{g}\left(\lambda df_x(y_1) + \mu df_x(x_1), df_x(y_2)\right)$$
$$\stackrel{*}{=} \lambda \tilde{g}\left(df_x(y_1), df_x(y_2)\right) + \mu \tilde{g}\left(df_x(x_1), df_x(y_2)\right) = \lambda g(y_1, y_2) + \mu g(x_1, y_2)$$

- Nicht ausgeartet: Wir wissen dass df_x injektiv ist. Sei also $k \in T_xM$ so dass
$$\forall\ y \in T_xM : g(k, y) = \tilde{g}(df_x(k), df_x(y)) = 0$$
Da $\tilde{g}$ nicht ausgeartet ist (da Metrik) muss gelten $df_x(k) = 0$. Doch da df_x injektiv ist, folgt $k = 0$. Somit ist auch g nicht ausgeartet.

b) Wir beginnen mit der Definition $df_x(y_1)(g) := y_1(g \circ f)(x)$ und schreiben
$$df_x(\partial_i)(g) = \partial_i(g \circ f)(x) = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial g}{\partial f_k} \cdot \partial_i f_k \cong \operatorname{grad} g \cdot \partial_i \vec{f} \ \rightarrow \ \tilde{\partial}_i := df_x(\partial_i) = \partial_i \vec{f}$$
$$g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j) = \underbrace{\tilde{g}}_{:=g_1}\left(\tilde{\partial}_i, \tilde{\partial}_j\right) \stackrel{*}{=} \partial_i \vec{f} \cdot \partial_j \vec{f} \quad (*) : Euklidisch$$
Für die spezielle Karte f bekommen wir
$$\partial_\vartheta \vec{f} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \cos\vartheta \\ \sin\varphi \cos\vartheta \\ -\sin\vartheta \end{pmatrix} \ , \ \partial_\varphi \vec{f} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \sin\vartheta \\ \cos\varphi \sin\vartheta \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\rightarrow \ \partial_\vartheta \vec{f} \cdot \partial_\varphi \vec{f} = \partial_\varphi \vec{f} \cdot \partial_\vartheta \vec{f} = 0, \quad \partial_\vartheta \vec{f} \cdot \partial_\vartheta \vec{f} = 1, \quad \partial_\varphi \vec{f} \cdot \partial_\varphi \vec{f} = \sin^2\vartheta$$
und schließlich den metrischen Tensor
$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\vartheta \end{pmatrix}$$

Bemerkung: Auf die Vorschrifft zum ausrechnen der g_{ij} kann man auch durch folgende Überlegung kommen: Es gilt für beide metrischen Tensoren g und $\tilde{g}$ für das Bogenelement ds bzw. $d\tilde{s}$ entlang einer Kurve γ bzw. $\tilde{\gamma}$:

$$ds^2 = g_{ij} du^i du^j, \; d\tilde{s}^2 = \tilde{g}_{ij} dx^i dx^k$$

Dabei sind x^i und u^i jeweils die *Koordinaten* des zugrundeliegenden Vektorraumes von M_1 bzw. M. So sind speziell in unserem Fall x^i die kartesischen Koordinaten im $\mathbb{R}^3$ und u^i die Winkelkoordinaten ϑ, φ. Fordern wir $ds = d\tilde{s}$ so bekommt man

$$g_{ij} du^i du^j = \tilde{g}_{ij} dx^i dx^j = \delta_{ij} dx^i dx^j = dx^i dx^i = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{dx^i}{du^k} du^k \right)^2 = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{dx^i}{du^k} \right)^2 \cdot \left(du^k\right)^2 \;\rightarrow\; g_{kl} = \begin{cases} 0 & : k \neq l \\ \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{dx^i}{du^k} \right)^2 & : k = l \end{cases}$$

c) Das Bild der Abbildung ist die Oberfläche der Einheitskugel

$$S_1 := \left\{ \vec{r} \in \mathbb{R}^3 : \|\vec{r}\| = 1 \right\}$$

Die Funktionen φ und ϑ entsprechen genau den Kugelkoordinaten $(1, \vartheta, \varphi)$.

Aufgabe 02

a) Die Matrix des Tensors ist bzgl. der Basis $\partial_\vartheta, \; \partial_\varphi$ diagonal. Somit ist die inverse g^{ik} einfach

$$\left(g^{ik}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\sin^2 \vartheta} \end{pmatrix}$$

Dann ergeben sich die Christopher-Symbole als:

$$\Gamma^i_{ii} = \frac{1}{2} \cdot g^{ii} \partial_i g_{ii} \;\rightarrow\; \Gamma^\vartheta_{\vartheta\vartheta} = \frac{g^{\vartheta\vartheta}}{2} \frac{\partial}{\partial \vartheta} g_{\vartheta\vartheta} = 0, \quad \Gamma^\varphi_{\varphi\varphi} = 0$$

$$i \neq k : \Gamma^k_{ii} = -\frac{1}{2} g^{kk} \partial_k g_{ii} \;\rightarrow\; \Gamma^\varphi_{\vartheta\vartheta} = -\frac{1}{2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} = 0, \; \Gamma^\vartheta_{\varphi\varphi} = -\sin\vartheta \cos\vartheta$$

$$j \neq i : \Gamma^j_{ij} = \frac{1}{2} g^{jj} \partial_i g_{jj} \;\rightarrow\; \Gamma^\varphi_{\varphi\vartheta} = \Gamma^\varphi_{\vartheta\varphi} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin^2 \vartheta\right) = \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}, \; \Gamma^\vartheta_{\vartheta\varphi} = \Gamma^\vartheta_{\varphi\vartheta} = 0$$

$$\Gamma^k_{ij} = 0 \;\; : sonst$$

Die Geodätische Gleichung lautet dementsprechend

$$\left(x^l\right)'' = -\Gamma^l_{ij} \left(x^i\right)' \left(x^j\right)'$$

$$\varphi'' = -2\Gamma^\varphi_{\vartheta\varphi} \varphi' \vartheta' - \Gamma^\varphi_{\vartheta\vartheta} \left(\vartheta'\right)^2 - \Gamma^\varphi_{\varphi\varphi} \left(\varphi'\right)^2 = -\frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta} \varphi' \vartheta'$$

$$\vartheta'' = -2\Gamma^\vartheta_{\vartheta\varphi} \varphi' \vartheta' - \Gamma^\vartheta_{\vartheta\vartheta} \left(\vartheta'\right)^2 - \Gamma^\vartheta_{\varphi\varphi} \left(\varphi'\right)^2 = \sin\vartheta \cos\vartheta \left(\varphi'\right)^2$$

b) Wir schreiben die erste Gleichung um und bekommen

$$\frac{\varphi''}{\varphi'} = \left(\ln \varphi'\right)' = -\frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta} \vartheta' \;\rightarrow\; \ln \left| \frac{\varphi'}{v^0_\varphi} \right| = \int_{v^0_\varphi}^{\varphi'} \ln \tau \; d\tau = -\int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{\cos\tau}{\sin\tau} \; d\tau = \ln \left| \frac{\sin\vartheta_0}{\sin\vartheta} \right|$$

$$\rightarrow \; \varphi' \sin\vartheta = v^0_\varphi \sin\vartheta_0$$

wobei ϑ_0, φ_0 und $v^0_\vartheta, v^0_\varphi$ jeweils die Anfangsposition und *Anfangsgeschwindigkeit* seien. Wir setzten oberes Ergebnis in die zweite Gleichung ein und erhalten

$$\vartheta'' = \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta} \cdot \underbrace{\left(\sin\vartheta_0 V^0_\varphi\right)^2}_{a}$$

Wir substituieren $\vartheta' =: p(\vartheta)$ und erhalten

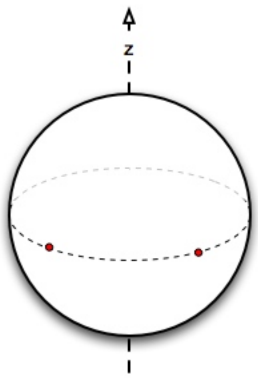
$$\vartheta'' = \frac{dp}{d\vartheta} \cdot \vartheta' \;\rightarrow\; \frac{dp}{d\vartheta} = \frac{\cos\vartheta}{p\sin\vartheta} \;\rightarrow\; \frac{1}{2}\left((\vartheta')^2 - {v^0_\vartheta}^2\right) = \int_{v^0_\vartheta}^{\vartheta'} \tau \; d\tau = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{\cos\tau}{\sin\tau} \; d\tau = \ln\left|\frac{\sin\vartheta}{\sin\vartheta_0}\right|$$

$$\vartheta' = \sqrt{{v^0_\vartheta}^2 + 2\ln\left|\frac{\sin\vartheta}{\sin\vartheta_0}\right|}$$

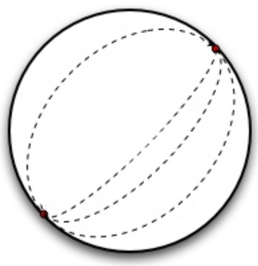
Wir setzen $\vartheta_0 = \dfrac{\pi}{2},\; v^0_\vartheta = 0$ und sehen dass sich die eindeutige Lösung $\vartheta(t) = \vartheta_0 : \mathit{const}$ ergibt. Demnach ergibt sich auch für $\varphi(t)$ die eindeutige Lösung

$$\varphi' = v^0_\varphi \;\rightarrow\; \varphi(t) = t v^0_\varphi + \varphi_0$$

Obere Kurve beschreibt eine Geodäte. Untersuchen wir nun die Geodäten die zwei beliebige Punkte $(\vartheta_0, \varphi_0),\; (\vartheta_1, \varphi_1)$ verbinden, so kann man das Koordinatensystem so ändern, dass $\vartheta_0 = \vartheta_1 = \dfrac{\pi}{2}$ ist. Somit stellt die Geodäte eine Verbindungslinie der beiden Punkte und ferner einen Großkreis dar. Das (frei wählbare) φ_0 ist dabei bedeutungslos für die Gültigkeit der Lösung.



Im Spezialfall dass $\varphi_2 = \varphi_1 + \pi$ ist, gibt es unendlich viele mögliche Orientierungen der z-Achse und somit entsprechend viele die Punkte verbindende Geodäten.



Allgemein bewegen sich also kraftfreie Körper auf Großkreisen der Sphäre.

Aufgabe 03

Wir suchen eine Parametrisierung $s : [a_1, b_1] \to [a, b]$ so dass mit $\gamma(\tau) := \beta(s(\tau))$ gilt:

$$\nabla_{\gamma'}\gamma' = 0$$

Per Definition des Tangentenvektors gilt für eine skalare Funktion $h : M \to \mathbb{R}$

$$\gamma' h := \frac{d(h\circ\gamma)}{d\tau} = \frac{d(h\circ\beta\circ s)}{d\tau} = \frac{d(h\circ\beta)}{ds}\cdot\frac{ds}{d\tau} = s'\cdot\beta' h$$

Somit ist $\gamma' = s' \cdot \beta'$. Wir verwenden die Eigenschaften der kovarianten Ableitung

$$\nabla_{fX}Y = f\nabla_X Y \quad , \quad \nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + (Xf)Y$$

und schreiben

$$\nabla_{\gamma'}\gamma' = \nabla_{s'\beta'}(s'\beta') = s'\cdot\nabla_{\beta'}(s'\beta') = s'\cdot[s'\cdot\nabla_{\beta'}\beta' + (\beta's')\beta']$$

$$= s'\cdot\left[s'\cdot f(t) + \frac{d(s'\circ\beta^{-1}\circ\beta)}{ds}\right]\cdot\beta' = s'\cdot\left[s'\cdot f(t) + \frac{ds'}{ds}\cdot\underbrace{\frac{d(\beta^{-1}\circ\beta)}{ds}}_{1}\right]\cdot\beta' = s'\cdot\left[s'\cdot f(t) + \frac{ds'}{d\tau}\cdot\frac{d\tau}{ds}\right]\cdot\beta'$$

$$= s'\cdot\left[s'\cdot f(t) + s''\cdot\frac{1}{s'}\right]\cdot\beta' = \left[(s')^2 f(t) + s''\right]\cdot\beta' \overset{!}{=} 0$$

Die Parametrisierung s erfüllt also die DGL

$$s'' + (s')^2 f(t) = 0$$

Die Lösung dieser ist gegeben durch

$$s = \int \frac{dt}{\int f(t)\, dt}$$

was man durch eine Probe leicht verifizieren kann. Somit ist $\gamma(s(\tau))$ eine Geodäte. $\square$

Aufgabe 04

Die Matrix der kovarianten Metrik ist gegeben durch

$$(g_{ik}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f(t) \end{pmatrix}$$

a) Wir rechnen die Christoffel-Symbole gemäß

$$\Gamma^l_{ij} = g^{kl}\cdot(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij})$$

aus und erhalten

$$\Gamma^t_{\varphi\varphi} = \frac{f'(t)}{2f^2(t)},\ \Gamma^k_{ij} = 0 : sonst$$

Die Kurve

$$\gamma(\tau) = (\tau, \varphi_0)$$

ist eine Geodäte, da sie die Geodätengleichung erfüllt:

$$\varphi'' = 0 = -\Gamma^\varphi_{ik}(x^i)'(x^k)' \quad , \quad t'' = 0 = -\frac{f'(\tau)}{2f^2(\tau)}\underbrace{(\varphi')^2}_{0} = -\Gamma^t_{ik}(x^i)'(x^k)'$$

b) Für $f > 0$ kann man die Kurve als (global) kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten $P_0 := (t_0, \varphi_0),\ P_1 := (t_1, \varphi_0)$ betrachten. Die entsprechende Weglänge $l_\gamma(t_0, t_1)$ ist nämlich gegeben durch

$$l_\gamma(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\frac{dt^2}{d\tau^2} + f(t(\tau))\frac{d\varphi^2}{d\tau^2}}\ d\tau = \int_{t_0}^{t_1} d\tau = t_1 - t_0$$

Durch die Wahl irgendeiner anderen die Punkte $P_0,\ P_1$ verbindenden Kurve $\zeta(\tau) = (t(\tau), \varphi(\tau))$ könnte sich nie eine kleinere Weglänge ergeben:

$$l_\zeta\left(t(\tau_0), t(\tau_1)\right) = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \sqrt{\frac{dt^2}{d\tau^2} + f(t(\tau))\frac{d\varphi^2}{d\tau^2}}\ d\tau \geq \int_{\tau_0}^{\tau_1} \sqrt{\frac{dt^2}{d\tau^2}}\ d\tau$$

$$= \int_{\tau_0}^{\tau_1} \left|\frac{dt}{d\tau}\right|\ d\tau \geq \int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{dt}{d\tau}\ d\tau = t(\tau_1) - t(\tau_2) = I_\gamma\left(t(\tau_0), t(\tau_1)\right) \quad \square$$

c) Die Kurve

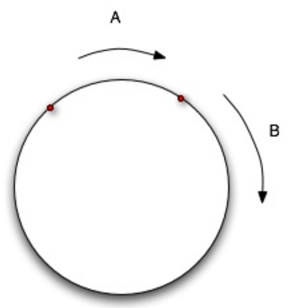
$$\gamma(\tau) = (t_0, \tau)$$

erfüllt auch die Geodätengleichung

$$\varphi'' = 0 = -\Gamma^\varphi_{ik}(x^i)'(x^k)' \quad , \quad t'' = 0 = -\underbrace{f'(t_0)}_{0} \cdot \frac{1}{2f^2(t_0)}\left(\varphi'\right)^2 = -\Gamma^t_{ik}(x^i)'(x^k)'$$

da f in $t = t_0$ extremal ist, und ist so eine Geodäte.

d) Wir betrachten zwei Punkte auf dem Kreis S^1 bei konstanter *Zeit* t_0



und sehen dass $\gamma(\tau)$ mal den kürzeren Weg (B) und mal den längeren Weg (A) zwischen den beiden Punkten nehmen kann, je nach dem was man als Anfangs & Endpunkt festlegt.