Differentialgeometrie auf Mannigfaltigkeiten
FSU Jena - WS 07/08
Serie 05

Prof. Vladimir S. Matveev

17. April 2009

Aufgabe 1: Induzierte/zurückgezogene Metriken

Definition: Sei $f : M^n \to M_1^{n_1}$ eine glatte Abbildung so dass für jedes $x \in M$ $df_x : T_xM \to T_{f(x)}M_1$ injektiv ist. Für jede Metrik g_1 auf M_1 definiert man eine Metrik (heißt **zurückgezogene Metrik** oder **Pullback Metrik**) $g : f^*g_1$ auf M wie folgt:

$$g(y_1, y_2) = g_1(df_x(y_1), df_x(y_2))$$

wobei $y_1, y_2 \in T_xM$ beliebige Tangentialvektoren sind.

a) Zeigen Sie: f^*g_1 ist eine Metrik

b) Berechnen Sie diese Metrik für die Abbildung

$$f : (0, 2\pi) \times (0, \pi) \to \mathbb{R}^3, \ f(\varphi, \vartheta) = (\cos\varphi \sin\vartheta, \sin\varphi \sin\vartheta, \cos\vartheta)$$

wobei g_1 die Euklidische Metrik (der Signatur $(+, +, +)$) auf $\mathbb{R}^3$ ist.

c) Zeichnen Sie das Bild der Abbildung, und interpretieren Sie die Funktionen φ und ϑ als sphärische Koordinaten.

Aufgabe 02: Geodäten der Sphäre

a) Berechnen Sie die Kristoffel-Symbole für die Metrik g aus Aufgabe 1b, und schreiben Sie die geodätische Gleichung auf.

b) Lösen Sie die Gleichung, und interpretieren Sie die Geodäten geometrisch als Grosskreisen.

Aufgabe 03

Sei $\beta : [a, b] \to M$ eine umparametrisierte Weltlinie. Angenommen, $\nabla_{\beta'(t)}\beta'(t) = f(t)\beta'(t)$ für alle $t \in [a, b]$ (für irgendwelche Funktion $f(t)$). Zeigen Sie: nach geeigneter Umparametrisierung ist sie eine Geodäte.

Aufgabe 04: Rotationsflächen

Man betrachte $\mathbb{R} \times S^1$ mit der Rotationsmetrik $dt^2 + f(t)d\varphi^2$. Die Funktion f sei $\mathcal{C}^\infty$, sei nie 0, und hänge nur von der t Koordinate ab.

a) Zeigen Sie, dass die Kurven $\gamma(t) = (t, Konstant)$ (umparametrisierte) Geodäten sind.

b) Falls $f > 0$, interpretieren Sie diese Kurven global als die kürzesten Verbindungskurven.

c) Sei t_0 ein Extrempunkt der Funktion f. Man zeige: die Kurve $\gamma(\varphi) = (t_0, \varphi)$ ist auch eine Geodäte.

d) Finden Sie ein qualitatives (= mit Bild, ohne Rechnerei) Beispiel, so dass $f \geq 2$ und die Kurve (global) nicht die kürzeste Verbindungskurve ist.