Differentialgeometrie auf Mannigfaltigkeiten
FSU Jena - WS 07/08
Serie 04 - Lösungen

Stilianos Louca

17. April 2009

Aufgabe 15

Bemerkung: Da g antisymmetrisch ist, gilt $g_{ii} = 0$.
Wir wählen die kanonische Basis $e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{R}^3$ und suchen ein $z = z^i e_i$ so dass $g(x, y) = (x \times y) \cdot z$ für alle $x = x^i e_i,\ y = y^i e_i \in \mathbb{R}^3$ gilt. Wir wollen erstmal zeigen, dass wenn es so eins gibt, dies eindeutig bestimmt ist. Wir beginnen mit

$$g(x, y) = x^i y^j g(e_i, e_j) = x^i y^j g_{ij} \overset{!}{=} (x \times y) \cdot z \ \forall\ x, y$$

wobei klar ist dass $f(x, y) := (x \times y) \cdot z$ eine antisymmetrische Bilinearform ist. Wir wählen jetzt $x := e_l,\ y := e_m$. Somit ist z eindeutig bestimmt, denn

$$g(e_l, e_m) = \delta_l^i \delta_m^j g_{ij} = g_{lm} \overset{!}{=} f(e_l, e_m) = (e_l \times e_m) \cdot z^k e_k = z^k \varepsilon_{lmk}$$

$$g_{23} = z^k \varepsilon_{23k} = z^1,\ g_{31} = z^k \varepsilon_{31k} = z^2,\ g_{12} = z^k \varepsilon_{12k} = z^3 \ \leftrightarrow\ z = \begin{pmatrix} g_{23} \\ g_{31} \\ g_{12} \end{pmatrix}$$

Mit dem Ansatz gehen wir jetzt an die Sache ran, und zeigen dass dies tatsächlich auch alle Erwartungen erfüllt. Wir haben gezeigt dass

$$g(e_1, e_2) = (e_1 \times e_2) \cdot z = f_{12},\ g(e_2, e_3) = (e_2 \times e_3) \cdot z = f_{23},\ g(e_3, e_1) = (e_3 \times e_1) \cdot z = f_{31}$$

Ferner gilt $f_{ik} = -f_{ki},\ f_{ii} = 0$ aufgrund der Antisymmetrie von $x \times y$.
Somit ist $g_{ik} = f_{ik}\ \forall\ i, k$ und demnach auch $f = g$. $\square$

Aufgabe 16

Wir wählen eine Lorenzbasis x und $e_1, e_2, e_3 \in x^\perp$ und schreiben

$$i \neq 0 : -F_{0i} = F_{i0} = F(e_i, x) = g(e_i, E) = E^j g(e_i, e_j) = E^j \cdot g_{ij} = -E_i$$

$$i, j \neq 0 : F_{ij} = F(e_i, e_j) = g(e_i \times e_j, B) = g\left(\varepsilon_{ijk} \vec{e}^{\ k}, B^l e_l\right) = B^l \varepsilon_{ijk} g_l^k$$

Ferner gilt wegen der Antisymmetrie von $F : F_{ii} = 0\ \forall\ i$. Somit folgt:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & E^1 & E^2 & E^3 \\ -E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ -E_2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ -E_3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 17

Seien F_{ij} bzw. F'_{ij} die Komponenten von F bzgl. der alten bzw. neuen Basis. Wir beginnen mit

$$F_{ij} = F(e_i, e_j),\ F'_{ij} = F(e'_i, e'_j)$$

wobei $e_0 := x,\ e'_0 := x'$, und bekommen

$$F'_{ii} = 0, \quad i, j \in \{2, 3\} \ \rightarrow \ F'_{ij} = F(e'_i, e'_j) = F(e_i, e_j) = F_{ij}$$

$$F'_{01} = -F'_{10} = F\left(e'_0, e'_1\right) = F\left(\frac{x + \beta e_1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{\beta x + e_1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = \frac{1}{1-\beta^2} \cdot \left[\beta \underbrace{F(x,x)}_{0} + \underbrace{F(x,e_1)}_{F_{01}} + \beta^2 \underbrace{F(e_1,x)}_{F_{10}} + \beta \underbrace{F(e_1,e_1)}_{0}\right]$$

$$= \frac{1}{1-\beta^2} \cdot F_{01} \cdot \left(1 - \beta^2\right) = F_{01}$$

$$F'_{02} = -F'_{20} = F\left(x', e'_2\right) = F\left(\frac{x + \beta e_1}{\sqrt{1-\beta^2}}, e_2\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \left[F(x, e_2) + \beta F(e_1, e_2)\right] = \frac{F_{02} + \beta F_{12}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$F'_{03} = -F'_{30} = F\left(x, e_3\right) = \frac{F_{03} + \beta F_{13}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$F'_{12} = -F'_{21} = F\left(e'_1, e'_2\right) = F\left(\frac{\beta x + e_1}{\sqrt{1-\beta^2}}, e_2\right) = \frac{\beta F_{02} + F_{12}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$F'_{13} = -F'_{31} = F\left(e'_1, e'_3\right) = F\left(\frac{\beta x + e_1}{\sqrt{1-\beta^2}}, e_3\right) = \frac{\beta F_{03} + F_{13}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Aufgabe 18

Die Kugeloberfläche $\mathcal{O}$ sei parametrisiert durch

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\sin\vartheta \\ r\sin\varphi\sin\vartheta \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix} : \vartheta \in [0, \pi],\ \varphi \in [0, 2\pi),\ r : const$$

Dann sind die Koordinatenvektorfelder gegeben durch

$$\partial_\vartheta = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\vartheta} = r \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\vartheta \\ \sin\varphi\cos\vartheta \\ -\sin\vartheta \end{pmatrix}$$

$$\partial_\varphi = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi} = r \begin{pmatrix} -\sin\varphi\sin\vartheta \\ \cos\varphi\sin\vartheta \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der metrische Tensor g ist bzgl. dieser Basis gegeben durch

$$(g_{ik}) = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2\sin^2\vartheta \end{pmatrix}$$

und ist somit diagonal. Somit ist die inverse g^{ik} einfach

$$\left(g^{ik}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \end{pmatrix}$$

Dann ergeben sich die Christopher-Symbole als:

$$\Gamma^i_{ii} = \frac{1}{2} \cdot g^{ii} \partial_i g_{ii} \ \rightarrow \ \Gamma^\vartheta_{\vartheta\vartheta} = \frac{g^{\vartheta\vartheta}}{2} \frac{\partial}{\partial\vartheta} g_{\vartheta\vartheta} = 0, \ \ \Gamma^\varphi_{\varphi\varphi} = 0$$

$$i \neq k : \Gamma^k_{ii} = -\frac{1}{2} g^{kk} \partial_k g_{ii} \ \rightarrow \ \Gamma^\varphi_{\vartheta\vartheta} = -\frac{1}{2r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial}{\partial\varphi} r^2 = 0, \ \Gamma^\vartheta_{\varphi\varphi} = -\sin\vartheta \cos\vartheta$$

$$j \neq i : \Gamma^j_{ij} = \frac{1}{2} g^{jj} \partial_i g_{jj} \ \rightarrow \ \Gamma^\varphi_{\varphi\vartheta} = \Gamma^\varphi_{\vartheta\varphi} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial\vartheta} \left(r^2 \sin^2 \vartheta\right) = \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}, \ \Gamma^\vartheta_{\vartheta\varphi} = \Gamma^\vartheta_{\varphi\vartheta} = 0$$

$$\Gamma^k_{ij} = 0 \ \ : sonst$$

und dementsprechend die kovarianten Ableitungen

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma^l_{ij} \partial_l \ \rightarrow \ \nabla_{\partial_\vartheta} \partial_\vartheta = \Gamma^\vartheta_{\vartheta\vartheta} \partial_\vartheta + \Gamma^\varphi_{\vartheta\vartheta} \partial_\varphi = 0$$

$$\nabla_{\partial_\vartheta} \partial_\varphi = \Gamma^\vartheta_{\vartheta\varphi} \partial_\vartheta + \Gamma^\varphi_{\vartheta\varphi} \partial_\varphi = \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta} \cdot \partial_\varphi$$

$$\nabla_{\partial_\varphi} \partial_\varphi = \Gamma^\vartheta_{\varphi\varphi} \partial_\vartheta + \Gamma^\varphi_{\varphi\varphi} \partial_\varphi = -\cos\vartheta \sin\vartheta \cdot \partial_\vartheta$$

Andernfalls ergeben sich die Richtungsableitungen als

$$D_{\partial_\vartheta} \partial_\vartheta = \frac{\partial}{\partial\vartheta} \partial_\vartheta = -r \begin{pmatrix} \cos\varphi \sin\vartheta \\ \sin\varphi \sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} = -\vec{r}$$

$$D_{\partial_\varphi} \partial_\varphi = \frac{\partial}{\partial\varphi} \partial_\varphi = -r \begin{pmatrix} \cos\varphi \sin\vartheta \\ \sin\varphi \sin\vartheta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$D_{\partial_\vartheta} \partial_\varphi = \frac{\partial}{\partial\vartheta} \partial_\varphi = r \begin{pmatrix} -\sin\varphi \cos\vartheta \\ \cos\varphi \cos\vartheta \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die kovarianten Ableitungen ergeben sich aus den Projektionen der Richtungsableitungen auf die Fläche:

$$\nabla_{\partial_\vartheta} \partial_\vartheta = 0 \ da \ \vec{r} \perp \ \mathcal{O}$$

$$\nabla_{\partial_\vartheta} \partial_\varphi = \frac{1}{\|\partial_\vartheta\|^2} \underbrace{\left(D_{\partial_\vartheta} \partial_\varphi \cdot \partial_\vartheta\right)}_{0} \cdot \partial_\vartheta + \frac{1}{\|\partial_\varphi\|^2} \left(D_{\partial_\vartheta} \partial_\varphi \cdot \partial_\varphi\right) \cdot \partial_\varphi = \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta} \cdot \partial_\varphi$$

$$\nabla_{\partial_\varphi} \partial_\varphi = \frac{1}{\|\partial_\vartheta\|^2} \left(D_{\partial_\varphi} \partial_\varphi \cdot \partial_\vartheta\right) \cdot \partial_\vartheta + \frac{1}{\|\partial_\varphi\|^2} \underbrace{\left(D_{\partial_\varphi} \partial_\varphi \cdot \partial_\varphi\right)}_{0} \cdot \partial_\varphi = -\cos\vartheta \sin\vartheta \cdot \partial_\vartheta$$

wobei "·" das Standardskalarprodukt sei.

Aufgabe 19

Der Riemansche Krümmungstensor $R : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ ist gegeben durch

$$R^s_{ijk} = \partial_j \Gamma^s_{ki} - \partial_k \Gamma^s_{ji} + \Gamma^s_{jr}\Gamma^r_{ki} - \Gamma^s_{kr}\Gamma^r_{ji}$$

$$R^\vartheta_{\vartheta\vartheta\vartheta} = \partial_\vartheta \Gamma^\vartheta_{\vartheta\vartheta} - \partial_\vartheta \Gamma^\vartheta_{\vartheta\vartheta} + \Gamma^\vartheta_{\vartheta r}\Gamma^r_{\vartheta\vartheta} - \Gamma^\vartheta_{\vartheta r}\Gamma^r_{\vartheta\vartheta} = 0$$

$$R^\varphi_{\vartheta\vartheta\vartheta} = \partial_\vartheta \Gamma^\varphi_{\vartheta\vartheta} - \partial_\vartheta \Gamma^\varphi_{\vartheta\vartheta} + \Gamma^\varphi_{\vartheta r}\Gamma^r_{\vartheta\vartheta} - \Gamma^\varphi_{\vartheta r}\Gamma^r_{\vartheta\vartheta} = 0$$

$$R^\vartheta_{\vartheta\vartheta\varphi} = \partial_\vartheta \Gamma^\vartheta_{\varphi\vartheta} - \partial_\varphi \Gamma^\vartheta_{\vartheta\vartheta} + \Gamma^\vartheta_{\vartheta r}\Gamma^r_{\varphi\vartheta} - \Gamma^\vartheta_{\varphi r}\Gamma^r_{\vartheta\vartheta} = 0$$

$$R^\varphi_{\vartheta\vartheta\varphi} = \partial_\vartheta \Gamma^\varphi_{\varphi\vartheta} - \partial_\varphi \Gamma^\varphi_{\vartheta\vartheta} + \Gamma^\varphi_{\vartheta r}\Gamma^r_{\varphi\vartheta} - \Gamma^\varphi_{\varphi r}\Gamma^r_{\vartheta\vartheta} = \frac{1}{\sin^2\vartheta} + \frac{\cos^2\vartheta}{\sin^2\vartheta} = -1$$

$$R^\vartheta_{\vartheta\varphi\vartheta} = -R^\vartheta_{\vartheta\vartheta\varphi} = 0$$

$$R^\varphi_{\vartheta\varphi\vartheta} = -R^\varphi_{\vartheta\vartheta\varphi} = 1$$

$$R^\vartheta_{\vartheta\varphi\varphi} = -R^\vartheta_{\vartheta\varphi\varphi} \;\to\; R^\vartheta_{\vartheta\varphi\varphi} = 0$$

$$R^\varphi_{\vartheta\varphi\varphi} = -R^\varphi_{\vartheta\varphi\varphi} \;\to\; R^\varphi_{\vartheta\varphi\varphi} = 0$$

$$R^\vartheta_{\varphi\vartheta\vartheta} = -R^\vartheta_{\varphi\vartheta\vartheta} \;\to\; R^\vartheta_{\varphi\vartheta\vartheta} = 0$$

$$R^\varphi_{\varphi\vartheta\vartheta} = -R^\varphi_{\varphi\vartheta\vartheta} \;\to\; R^\varphi_{\varphi\vartheta\vartheta} = 0$$

$$R^\vartheta_{\varphi\vartheta\varphi} = \partial_\vartheta \Gamma^\vartheta_{\varphi\varphi} - \partial_\varphi \Gamma^\vartheta_{\vartheta\varphi} + \Gamma^\vartheta_{\vartheta r}\Gamma^r_{\varphi\varphi} - \Gamma^\vartheta_{\varphi r}\Gamma^r_{\vartheta\varphi} = \sin^2\vartheta$$

$$R^\varphi_{\varphi\vartheta\varphi} = \partial_\vartheta \Gamma^\varphi_{\varphi\varphi} - \partial_\varphi \Gamma^\varphi_{\vartheta\varphi} + \Gamma^\varphi_{\vartheta r}\Gamma^r_{\varphi\varphi} - \Gamma^\varphi_{\varphi r}\Gamma^r_{\vartheta\varphi} = 0$$

$$R^\vartheta_{\varphi\varphi\vartheta} = -R^\vartheta_{\varphi\vartheta\varphi} = -\sin^2\vartheta$$

$$R^\varphi_{\varphi\varphi\vartheta} = -R^\varphi_{\varphi\vartheta\varphi} = 0$$

$$R^\vartheta_{\varphi\varphi\varphi} = -R^\vartheta_{\varphi\varphi\varphi} \;\to\; R^\vartheta_{\varphi\varphi\varphi} = 0$$

$$R^\varphi_{\varphi\varphi\varphi} = -R^\varphi_{\varphi\varphi\varphi} \;\to\; R^\varphi_{\varphi\varphi\varphi} = 0$$

Der Kovariante Krümmungsoperator $\mathcal{R}$ ist gegeben durch

$$\mathcal{R}_{ijkr} = R^s_{jkr} g_{is}$$

$$\mathcal{R}_{\vartheta\vartheta\vartheta\vartheta} = -\mathcal{R}_{\vartheta\vartheta\vartheta\vartheta} \ \rightarrow \ \mathcal{R}_{\vartheta\vartheta\vartheta\vartheta} = 0$$

$$\mathcal{R}_{\vartheta\vartheta\vartheta\varphi} = -\mathcal{R}_{\vartheta\vartheta\vartheta\varphi} \ \rightarrow \ \mathcal{R}_{\vartheta\vartheta\vartheta\varphi} = 0$$

$$\mathcal{R}_{\vartheta\vartheta\varphi\vartheta} = -\mathcal{R}_{\vartheta\vartheta\varphi\vartheta} \ \rightarrow \ \mathcal{R}_{\vartheta\vartheta\varphi\vartheta} = 0$$

$$\mathcal{R}_{\vartheta\vartheta\varphi\varphi} = -\mathcal{R}_{\vartheta\vartheta\varphi\varphi} \ \rightarrow \ \mathcal{R}_{\vartheta\vartheta\varphi\varphi} = 0$$

$$\mathcal{R}_{\vartheta\varphi\vartheta\vartheta} = -\mathcal{R}_{\vartheta\varphi\vartheta\vartheta} \ \rightarrow \ \mathcal{R}_{\vartheta\varphi\vartheta\vartheta} = 0$$

$$\mathcal{R}_{\vartheta\varphi\vartheta\varphi} = R^{\vartheta}_{\varphi\vartheta\varphi} g_{\vartheta\vartheta} = r^2 \sin^2\vartheta$$

$$\mathcal{R}_{\vartheta\varphi\varphi\vartheta} = -\mathcal{R}_{\vartheta\varphi\vartheta\varphi} = -r^2 \sin^2\vartheta$$

$$\mathcal{R}_{\vartheta\varphi\varphi\varphi} = -\mathcal{R}_{\vartheta\varphi\varphi\varphi} \ \rightarrow \ \mathcal{R}_{\vartheta\varphi\varphi\varphi} = 0$$

$$\mathcal{R}_{\varphi\vartheta\vartheta\vartheta} = -\mathcal{R}_{\varphi\vartheta\vartheta\vartheta} \ \rightarrow \ \mathcal{R}_{\varphi\vartheta\vartheta\vartheta} = 0$$

$$\mathcal{R}_{\varphi\vartheta\vartheta\varphi} = -\mathcal{R}_{\vartheta\varphi\vartheta\varphi} = -r^2 \sin^2\vartheta$$

$$\mathcal{R}_{\varphi\vartheta\varphi\vartheta} = -\mathcal{R}_{\varphi\vartheta\vartheta\varphi} = r^2 \sin^2\vartheta$$

$$\mathcal{R}_{\varphi\vartheta\varphi\varphi} = -\mathcal{R}_{\varphi\vartheta\varphi\varphi} \ \rightarrow \ \mathcal{R}_{\varphi\vartheta\varphi\varphi} = 0$$

$$\mathcal{R}_{\varphi\varphi\vartheta\vartheta} = -\mathcal{R}_{\varphi\varphi\vartheta\vartheta} \ \rightarrow \ \mathcal{R}_{\varphi\varphi\vartheta\vartheta} = 0$$

$$\mathcal{R}_{\varphi\varphi\vartheta\varphi} = -\mathcal{R}_{\varphi\varphi\vartheta\varphi} \ \rightarrow \ \mathcal{R}_{\varphi\varphi\vartheta\varphi} = 0$$

$$\mathcal{R}_{\varphi\varphi\varphi\vartheta} = -\mathcal{R}_{\varphi\varphi\varphi\vartheta} \ \rightarrow \ \mathcal{R}_{\varphi\varphi\varphi\vartheta} = 0$$

$$\mathcal{R}_{\varphi\varphi\varphi\varphi} = -\mathcal{R}_{\varphi\varphi\varphi\varphi} \ \rightarrow \ \mathcal{R}_{\varphi\varphi\varphi\varphi} = 0$$

Der Ricci-Tensor ist demnach gegeben durch

$$\mathrm{Ric}_{ik} := R^j_{ijk}$$

$$\mathrm{Ric}_{\vartheta\vartheta} = R^r_{\vartheta r\vartheta} = R^{\vartheta}_{\vartheta\vartheta\vartheta} + R^{\varphi}_{\vartheta\varphi\vartheta} = 1$$

$$\mathrm{Ric}_{\vartheta\varphi} = R^r_{\vartheta r\varphi} = R^{\vartheta}_{\vartheta\vartheta\varphi} + R^{\varphi}_{\vartheta\varphi\varphi} = 0$$

$$\mathrm{Ric}_{\varphi\vartheta} = R^{\vartheta}_{\varphi\vartheta\vartheta} + R^{\varphi}_{\varphi\varphi\vartheta} = 0$$

$$\mathrm{Ric}_{\varphi\varphi} = R^{\vartheta}_{\varphi\vartheta\varphi} + R^{\varphi}_{\varphi\varphi\varphi} = \sin^2\vartheta$$

Daraus ergibt sich der gemischte Ricci Tensor als

$$\mathrm{Ric}_i^j := g^{jk}\,\mathrm{Ric}_{ik}$$

$$\mathrm{Ric}_\vartheta^\vartheta = g^{\vartheta\vartheta}\,\mathrm{Ric}_{\vartheta\vartheta} + g^{\vartheta\varphi}\,\mathrm{Ric}_{\vartheta\varphi} = \frac{1}{r^2}$$

$$\mathrm{Ric}_\vartheta^\varphi = g^{\varphi\vartheta}\,\mathrm{Ric}_{\vartheta\vartheta} + g^{\varphi\varphi}\,\mathrm{Ric}_{\vartheta\varphi} = 0$$

$$\mathrm{Ric}_\varphi^\vartheta = g^{\vartheta\vartheta}\,\mathrm{Ric}_{\varphi\vartheta} + g^{\vartheta\varphi}\,\mathrm{Ric}_{\varphi\varphi} = 0$$

$$\mathrm{Ric}_\varphi^\varphi = g^{\varphi\vartheta}\,\mathrm{Ric}_{\varphi\vartheta} + g^{\varphi\varphi}\,\mathrm{Ric}_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r^2}$$

und ferner der Krümmungsskalar als

$$S := \mathrm{Ric}_i^i = \mathrm{Ric}_\vartheta^\vartheta + \mathrm{Ric}_\varphi^\varphi = \frac{2}{r^2}$$