

Differentialgeometrie auf Mannigfaltigkeiten  
FSU Jena - WS 07/08  
Serie 04

17. April 2009

---

**Aufgabe 15**

Zeigen Sie: Zu jeder schiefsymmetrischen Bilinearform  $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  existiert genau ein  $z \in \mathbb{R}^3$  mit

$$g(x, y) = (x \times y) \cdot z \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^3$$

**Aufgabe 16**

Formulieren Sie die Komponenten des Feldstärkentensors mit den Komponenten der elektrischen und magnetischen Feldstärke.

**Aufgabe 17**

Rechnen Sie die Komponenten der Feldstärke von der Lorenzbasis  $x, e_1, e_2, e_3$  auf die Lorenzbasis

$$x' = \frac{x + \beta e_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad e'_1 = \frac{\beta x + e_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad e'_2 = e_2, \quad e'_3 = e_3$$

um.

**Aufgabe 18**

Berechnen Sie für die Kugelfläche:

$$\nabla_{\partial_\theta} \partial_\theta, \quad \nabla_{\partial_\varphi} \partial_\varphi, \quad \nabla_{\partial_\theta} \partial_\varphi$$

- mit den Christoffel Symbolen
- durch Projektion von  $D_{\partial_\theta} \partial_\theta$ ,  $D_{\partial_\varphi} \partial_\varphi$ ,  $D_{\partial_\theta} \partial_\varphi$  auf den Tangentialraum der Kugel.

**Aufgabe 19**

Berechnen Sie für die Kugeloberfläche die Krümmungsoperatoren, den Ricci-Tensor und den Krümmungsskalar.