Differentialgeometrie auf Mannigfaltigkeiten
FSU Jena - WS 07/08
Serie 03 - Lösungen

Stilianos Louca

17. April 2009

Aufgabe 09

Sei E ein endlich dimensionaler linearer Raum mit der Basis $x_1, ..., x_n$ und der entsprechenden Dualbasis $b^1, ..., b^n$. Sei $R := \{f : E^{*p} \times E^q \to E\}$ und $\Phi : R \to E_q^{p+1}$ definiert durch

$$\varphi \in R : \Phi(\varphi) = \vartheta,\ \vartheta\left(a^1, ..., a^{p+1}, x_1, ..., x_q\right) := a^{p+1}\varphi\left(a^1, ..., a^p, x_1, ..., x_q\right)$$

Wir wollen zeigen dass Φ ein Isomorphismus ist! Linearität ist wegen der Linearität von a^{p+1} gesichert!

Zeigen: Φ injektiv also $Kern(\Phi) = 0 \in R$. Sei $\varphi_0 \in R$ so dass $\Phi(\varphi_0) = 0 \in E_q^{p+1}$, also

$$\Phi(\varphi_0)\left(a^1, ..., a^{p+1}, x_1, ..., x_q\right) = a^{p+1}\varphi_0\left(a^1, ..., a^p, x_1, ..., x_q\right) = 0\ \ \forall\ a^1, ..., a^{p+1}, x_1, ..., x_q$$

Es muss also gelten

$$Bild(\varphi_0) \subset Kern\left(a^{p+1}\right)\ \forall\ a^{p+1}$$

Annahme: φ_0 ist nicht die Nullabbildung, dann gibt es einen Vektor $x \in E$ so dass $x \neq 0,\ x \in Bild(\varphi_0)$. Dann gibt es eine Linearform $a^{p+1} : E \to \mathbb{R}$ mit $a^{p+1}(x) \neq 0$ also $x \notin Kern\left(a^{p+1}\right)$. Zum Beispiel die Linearform definiert durch

$$a^{p+1}(\lambda x) = \lambda\ \forall\ \lambda \in \mathbb{R}\ \wedge\ a^{p+1}(y) = 0\ \forall\ y \notin span\{x\}$$

Doch dann wäre $\Phi(\varphi_0)$ auch nicht die Nullabbildung. Dies ist ein Widerspruch, also muss $\varphi_0 \equiv 0$ sein. Φ ist somit injektiv.

Zeigen: Φ surjektiv. Sei $\vartheta \in E_q^{p+1}$. Sei $\varphi \in R$ definiert als:

$$\varphi\left(a^1, ..., a^p, x_1, ..., x_q\right) := \vartheta\left(a^1, ..., a^p, b^i, x_1, ..., x_q\right) \cdot x_i$$

Offensichtlich ist φ linear. Zeigen jetzt: $\Phi(\varphi) = \vartheta$. Sei a^{p+1} beliebig und λ_i so dass $a^{p+1} = \lambda_i b^i$.

$$\Phi(\varphi)\left(a^1, ..., a^{p+1}, x_1, ..., x_q\right) = a^{p+1}\varphi\left(a^1, ..., a^p, x_1, ..., x_q\right)$$

$$= a^{p+1}\left[\vartheta\left(a^1, ..., a^p, b^i, x_1, ..., x_q\right) \cdot x_i\right] = \vartheta\left(a^1, ..., a^p, b^i, x_1, ..., x_q\right) \cdot a^{p+1}(x_i)$$

$$= \vartheta\left(a^1, ..., a^p, b^i, x_1, ..., x_q\right) \cdot \lambda_k b^k(x_i) = \vartheta\left(a^1, ..., a^p, b^i, x_1, ..., x_q\right) \cdot \lambda_k \delta_{ik}$$

$$= \vartheta\left(a^1, ..., a^p, b^i, x_1, ..., x_q\right) \cdot \lambda_i = \vartheta\left(a^1, ..., a^p, \lambda_i b^i, x_1, ..., x_q\right)$$

$$= \vartheta\left(a^1, ..., a^p, a^{p+1}, x_1, ..., x_q\right)$$

Somit ist Φ, surjektiv und ferner bijektiv. R ist also Isomorph zu E_q^{p+1}.
Variante: Die Räume R und E_q^p haben gleiche Dimensionen:

$$\dim R = \dim E_q^p = n^{p+q+1}$$

Da gezeigt wurde dass $\Phi : R \to E_q^{p+1}$ injektiv ist, ist

$$\dim Kern(\Phi) = 0$$

und somit nach der Dimensionsformel für lineare Abbildungen

$$\dim Bild(\Phi) = \dim Urbild(\Phi) = n^{p+q+1} = \dim E_q^{p+1}$$

Somit ist das Bild von Φ identisch E_q^{p+1} weshalb Φ surjektiv ist. Injektivität und Surjektivität implizieren jedoch Bijektivität. Somit ist Φ ein Isomorphismus. $\square$

Aufgabe 10

Sei $T \in E_q^p$ ein Tensor, $C_s^r f$ eine Kontraktion und o.B.d.A $r = p,\ s = q$. Seien $x_1, ..., x_n \in E$ und $y_1, ..., y_n \in E$ zwei Basen. Seien $a^1, ..., a^n$ und $b^1, ..., b^n$ die entsprechenden dual-Basen und $\alpha^1, .., \alpha^{p-1} \in E^*,\ \chi_1, ..., \chi_{q-1} \in E$ beliebig. Seien

$$x_i = \mu_i^k y_k,\ a^i = \lambda_k^i b^k$$

Demzufolge gilt allgemein

$$\delta_j^i = a^i(x_j) = a^i\left(\mu_j^k y_k\right) = \mu_j^k \lambda_l^i b^l(y_k) = \lambda_k^i \mu_j^k$$

Fassen wir λ und μ als $n \times n$ Matrizen auf, also $(\lambda)_k^i := \lambda_k^i,\ (\mu)_j^k := \mu_j^k$ so ist nach obiger Rechnung

$$\delta_i^j = \lambda_k^i \mu_j^k = (\lambda \cdot \mu)_j^i \ \to \ \mu = \lambda^{-1} \ \to \ (\mu \cdot \lambda)_i^j = \mu_k^j \lambda_i^k = \delta_i^j$$

Eingesetzt ergibt

$$(C_s^r T)_x(\alpha, \chi) := T\left(\alpha^1, ..., \alpha^{p-1}, a^k, \chi_1, ..., \chi_{q-1}, x_k\right) = T\left(\alpha^1, ..., \alpha^{p-1}, \lambda_l^k b^l, \chi_1, ..., \chi_{q-1}, \mu_k^m y_m\right)$$

$$= \lambda_l^k \mu_k^m \cdot T\left(\alpha^1, ..., \alpha^{p-1}, b^l, \chi_1, ..., \chi_{q-1}, y_m\right) = \delta_l^m \cdot T\left(\alpha^1, ..., \alpha^{p-1}, b^l, \chi_1, ..., \chi_{q-1}, y_m\right)$$

$$= T\left(\alpha^1, ..., \alpha^{p-1}, b^m, \chi_1, ..., \chi_{q-1}, y_m\right) =: (C_s^r T)_y(\alpha, \chi) \quad \square$$

Aufgabe 11

Sei $T \in \mathcal{L}(E, E)$ eine lineare Abbildung. Dann ist durch

$$T(a, x) := aTx,\ T : E^* \times E \to \mathbb{R}$$

ein $(1,1)$ Tensor definiert. Seien (T_j^i) die Einträge der entsprechenden Matrix bzgl. der Basis $x_1, ..., x_n \in E$ und (t_j^i) die Komponenten des Tensors bzgl. $x_1, ..., x_n$ und der Dualen Basis $a^1, ..., a^n \in E^*$. Wir wollen zeigen dass $t_j^i = T_j^i$.
Es gilt:

$$t_j^i = T\left(a^i, x_j\right) = a^i\ Tx_j$$

Die Multiplikation

$$T \cdot \vec{e}_j$$

ergibt die j-Spalte der Matrix T. Das heißt also

$$Tx_j = T_j^k \cdot x_k$$

Ferner

$$a^i T x_j = a^i\left(T_j^k \cdot x_k\right) = T_j^k a^i(x_k) = T_j^k \cdot \delta_{ik} = T_j^i$$

Also ist

$$t_j^i = T_j^i$$

Für die Kontraktion $C_1^1 T$ gilt demnach

$$\left(C_1^1 T\right) = T\left(a^k, x_k\right) = t_k^k = T_k^k = spur(T) \quad \square$$

Aufgabe 12

Sei $T \in \mathcal{L}(E, E)$ und $x \in E$. Die Tensoren sind definiert als

$$T \in E_1^1,\ T(a, \chi) := aT\chi$$

$$x \in E_0^1,\ x(a) := ax$$

Wir wollen zeigen dass Tx die Überschiebung von T und x ist, wobei

$$Tx(a) := a(Tx)$$

Sei $x_1, ..., x_n \in E$ die entsprechende Basis und dazu $a^1, ..., a^n \in E^*$ die Dualbasis. Sei $a \in E^*$ beliebig. Seien φ^k, ϑ_k so dass $x = \varphi^k x_k,\ a = \vartheta_k a^k$. Es gilt

$$LHS:\ \left(C_2^3(T \otimes x)\right)(\chi) = (T \otimes x)\left(a, x_k, a^k\right) = T\left(a, x_k\right) \cdot x\left(a^k\right) = (aTx_k) \cdot \left(a^k x\right)$$

$$= a\left(T_k^i x_i\right) \cdot a^k\left(\varphi^j x_j\right) = T_k^i \varphi^j \left(\vartheta_l a^l\right)(x_i) \cdot a^k x_j = T_k^i \varphi^j \vartheta_l \delta_i^l \delta_j^k = T_k^i \varphi^k \vartheta_i$$

$$RHS:\ aTx = a\left(T\varphi^k x_k\right) = \varphi^k a\left(T_k^i x_i\right) = \varphi^k T_k^i \left(\vartheta_j a^j\right)(x_i) = \varphi^k T_k^i \vartheta_j \delta_i^j = \varphi^k T_k^i \vartheta_i \quad \square$$

Aufgabe 13

Da g symmetrisch ist, gibt es eine Basis $x_1, ..., x_k \in E$ so dass $g_{ik} = \varepsilon_k \delta_{ik}$ wobei $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n$ die Spur von g ist. Ferner gilt $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$ da g nicht ausgeartet ist. Betrachten die Abbildung $J: E \to E^*,\ Jx := g(x, \cdot)$.
Zeigen: J ist injektiv. Sei $v = v^k x_k \in E$ beliebig, mit $Jv \equiv 0$, das heißt $g(v, u) = 0\ \forall\ u = u^l x_l \in E$. Dann gilt für $j \in \{1, ..., n\}$

$$0 = |g(v, x_j)| = \left|u^k g(x_k, x_j)\right| = \left|u^k g_{kj}\right| = \left|u^k \varepsilon_k \delta_{jk}\right| = \left|u^j \varepsilon_j\right| = \left|v^j\right| \ \rightarrow\ v^k = 0 \ \rightarrow\ v = 0$$

Zeigen: J ist surjektiv. Aus der Dimensionsformel für lineare Abbildungen folgt

$$\dim E^* = \dim E = \dim Bild(J) + \dim Kern(J) = \dim Bild(J)$$

Somit ist J surjektiv und ferner eine Bijektion bzw. ein Isomorphismus. $\square$

Aufgabe 14

Aufgrund der definition von x_i und J gilt für jede Linearform $\varepsilon_i J x_i \in E^*$:

$$\left(\varepsilon_i J x_i\right)\left(x_j\right) = \varepsilon_i g(x_i, x_j) = \varepsilon_i^2 \delta_{ij} = \delta_{ij}$$

Doch dies ist genau die Definition der Dualbasis von $x_1, ..., x_n$. $\square$