Differentialgeometrie auf Mannigfaltigkeiten
FSU Jena - WS 07/08
Serie 03

17. April 2009

Aufgabe 09

Sei E ein endlich dimensionaler linearer Raum. Zeigen Sie, dass der Raum aller multilinearer Abbildungen von $E^{*p} \times E^q$ nach E, isomorph zu E_q^{p+1} ist, mit einem von der Auswahl der Basis in E unabhängigen Isomorphismus.

Aufgabe 10

Zeigen Sie: Die Kontraktion $C_v^u f$ eines Tensors $f \in E_q^p$ hängt nicht von der Auswahl der Basis $y_1, ..., y_n$ ab.

Aufgabe 11

Zeigen Sie: Die lineare Abbildung $T \in \mathcal{L}(E, E)$ ist ein $(1,1)$-Tensor dessen Komponenten die Matrixelemente sind. Sein Kontraktion ist die Spur der Matrix.

Aufgabe 12

Zeigen Sie: Für $T \in \mathcal{L}(E, E)$ und $x \in E$ ist Tx die Überschiebung von T und x.

Aufgabe 13

Zeigen Sie: Für eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform $g : E \times E \to \mathbb{R}$ ist die lineare Abbildung $x \xrightarrow{J} g(x, \cdot)$ ein Isomorphismus: $J : E \to E^*$.

Aufgabe 14

Der n-dimensionale $\mathbb{R}$-lineare Raum E sei ausgestattet mit einer nicht ausgearteten symmetrischen bilinearform g. Für die Basis $x_1, ..., x_n$ in E gelte:

$$g(x_i, x_j) = \begin{cases} 0 & : i \neq j \\ \varepsilon_i & : i = j \end{cases}$$

Zeigen Sie: Dann ist $\varepsilon_1 J x_1, ..., \varepsilon_n J x_n$ die zu $x_1, ..., x_n$ duale Basis.