Differentialgeometrie auf Mannigfaltigkeiten
FSU Jena - WS 07/08
Serie 02

17. April 2009

Aufgabe 04

Zeigen Sie, dass der Raum aller Tangentenvektoren M_P im Punkt P der Mannigfaltigkeit M ein linearer Raum ist.

Aufgabe 05

Zeigen Sie, dass für Vektorfelder $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ auf der Mannigfaltigkeit M und $P \in M$, die Abbildung

$$f \to XYf(P) - YXf(P)$$

ein Tangentenvektor im M_P ist.

Aufgabe 06

Zeigen Sie, dass für skalare Felder $f, g \in \mathcal{F}(M)$ und Vektorfelder $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ der Mannigfaltigkeit M, für die Lie-Klammer gilt

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X$$

Aufgabe 07

Zeigen Sie, dass für

$$X = \sum_{i=1}^{n} X^i \partial_i,\ Y = \sum_{j=1}^{n} Y^j \partial_j$$

gilt:

$$[X, Y] = \sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{n} \left(X^i \partial_i Y^j - Y^i \partial_i X^j \right) \right] \partial_j$$

Aufgabe 08

Beweisen Sie die Jakobi-Identität

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$$