Differentialgeometrie auf Mannigfaltigkeiten
FSU Jena - WS 07/08
Serie 01 - Lösungen

Stilianos Louca

17. April 2009

Bemerkung: $B_\varepsilon^o(a)$ soll die offene Kugel mit dem Radius ε um den Punkt a bezeichnen.

Aufgabe 01

Wir beginnen mit der Definition für Stetigkeit. Die Funktion $f : D \subset X \to Y$ ist genau dann stetig im Punkt $a \in D$ wenn

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Sei $f : D \subset X \to Y$ stetig, $G \subset Y$ eine offene Menge und $g := f^{-1}(G) \subset X$ das Urbild von G. Wollen zeigen dass g offen ist.

Methode A Sei $x \in g$ beliebig und $\varepsilon > 0$ so dass $B_\varepsilon^o(f(x)) \subset G$. Dann gibt es aufgrund der Stetigkeit ein $\delta > 0$ so dass $f\left(B_\delta^o(x)\right) \subset B_\varepsilon^o(f(x)) \subset G$. Dann ist aber $B_\delta^o(x) \subset g$.
Somit ist g offen da es zu jedem $x \in g$ eine offene Kugel $B_\delta^o(x)$ gibt so dass $x \in B_\delta^o \subset g$

Methode B: **Annahme:** g sei nicht offen. Dann

$$\exists\ a \in g : \forall\ \delta > 0 : \neg\left(B_\delta^o(a) \subset g\right)]$$

bzw.

$$\forall\ \delta > 0 : \exists\ x_\delta \in B_\delta^o(a) : x_\delta \notin g$$

Definieren also die Folge $\delta_n \to 0$ und entsprechend die Folge $x_{\delta_n} = x_n \to a$. Dann ist auch die Folge $y_n = f(x_n)$ erklärt, wobei wegen der Stetigkeit $y_n \to f(\lim x_n) = f(a) \in G$ gilt. Jedoch gilt auch $y_n \notin G$ da $x_n \notin g$. Demzufolge gilt

$$\forall\ \varepsilon > 0 : \exists\ y_n \notin G : y_n \in B_\varepsilon^o(f(a))$$

Doch dies ist ein Widerspruch zur Eigenschaft von G offen zu sein, weshalb auch g offen sein muss.

Umgekehrt: Sei $f : D \subset X \to Y$ so geschaffen, dass für alle offenen Teilmengen $G \subset Y$ gilt

$$f^{-1}(G) : offen$$

Wir wollen die Stetigkeit von f zeigen.
Seien $\varepsilon > 0$ und $a \in D$ beliebig, dann ist

$$g := f^{-1}\left(B_\varepsilon^o(f(a))\right)$$

offen. Dann existiert um den Punkt $a \in g$ eine offene Kugel $B_\delta^o(a)$ so dass $B_\delta^o(a) \subset g$ und somit $f(B_\delta^o(a)) \subset B_\varepsilon^o(a)$ gilt. Somit ist f stetig. $\square$

Aufgabe 02

Sei $(a_n) \subset X$ eine gegen $a \in X$ konvergente Folge, wobei (X, d_X) ein metrischer Raum sei. Sei $G \subset X$ eine offene Teilmenge so dass $a \in G$ ist. Da G offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ so dass $B^o_\varepsilon(a) \subset G$ ist. Aus der Definition der Konvergenz folgt

$$\exists\ n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall\ n > n_\varepsilon : a_n \in B^o_\varepsilon(a) \subset G \ \Rightarrow\ a_n \in G$$

Umgekehrt, sei $(a_n) \subset X$ eine Folge und $a \in X$, so dass für jede offene Menge $G \subset X$ mit $a \in G$ auch folgt dass

$$\exists\ n_G \in \mathbb{N} : \forall\ n > n_G : a_n \in G$$

gilt. Für beliebiges $\varepsilon > 0$ gibt es also eine offene Umgebung

$$G := B^o_{\varepsilon/2}(a)$$

so dass

$$\exists\ n_G \in \mathbb{N} : \forall\ n > n_G : a_n \in G \subset B^o_\varepsilon(a) \ \Rightarrow\ a_n \in B^o_\varepsilon(a) \qquad \square$$

Aufgabe 03

Sei $(x_n) \subset M$ eine im Hausdorff-Raum $(M, \mathcal{O})$ konvergente Folge, mit den Grenzwerten $a \neq b$, das heißt

$$\forall\ G \in \mathcal{O},\ a \in G : \exists\ n_G \in \mathbb{N} : \forall\ n > n_G : x_n \in G$$

und analoges für b. Da der Raum Hausdorff ist, folgt

$$\exists\ U_a, U_b \in \mathcal{O} : a \in U_a,\ b \in U_b,\ U_a \cap U_b = \emptyset$$

Sei dann

$$n_0 := \max\{n_{U_a},\ n_{U_b}\}$$

was soviel heißt wie

$$\forall\ n > n_0 : x_n \in U_a\ \wedge\ x_n \in U_b$$

ws ein Widerspruch zur Hausdorff-Definition ist. Demzufolge hat jede konvergente Folge nur einen Grenzwert! $\square$