Integration auf Mannigfaltigkeiten

Eine Einführung

Stilianos Louca

17. November 2008

Inhaltsverzeichnis

1 Semi-Riemannsche Mannigfaltigkeiten

1.1 Metrik und Volumenform

Betrachten die n-dimensionale $\mathcal{C}^\infty$ Mannigfaltigkeit M.

1.1.1 Definition: Metrischer Tensor - semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit

Ein 2-fach kovariantes, symmetrisches Tensorfeld g auf M, wobei $g_{(P)}$ für alle $P \in M$ nicht ausgeartet ist, heißt *Metrik* oder *Fundamentaltensorfeld* auf M. Eine mit einer Metrik g ausgestattete $\mathcal{C}^\infty$ Mannigfaltigkeit heißt *semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit.*
Bemerkung: Da g symmetrisch und nicht ausgeartet ist, existiert nach dem Trägheitssatz von Sylvester stets eine Basis $e_1, .., e_n$ aus Tangentenvektorfeldern, so dass $\left(g_{(P)}\right) = \operatorname{diag}(\varepsilon_1, .., \varepsilon_n)$ mit $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$ ist. Eine solche Basis nennt man *semi-Orthonormalbasis.*

1.1.2 Definition: Volumenform

Die Volumenform V auf einer n-dimensionalen semi-Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) mit positiv orientierter, semi-Orthonormalbasis $e_1, .., e_n$ ist **die** n-Form, für die gilt

$$V(e_1, .., e_n) = 1$$

Da $\dim \Lambda^n M_P = 1$ ist für $P \in M$ und jede n-Form F auf jeder semi-Orthonormalbasis den gleichen Wert hat, ist V (unabhängig von einer Basis) wohldefiniert.

1.1.3 Darstellung der Volumenform

Es gilt:

$$V = a^1 \wedge \cdots \wedge a^n$$

bzw.

$$V(x_1, .., x_n) = \det\left(\left\langle a^i, x_j \right\rangle\right)$$

wobei $a^1, .., a^n$ die zu $e_1, .., e_n$ duale Basis bilden.

Beweis: Für Vektoren $x_i = \overbrace{\left\langle a^j, x_i \right\rangle}^{x_i^j} e_j, \; i = 1, .., n$ gilt

$$V(x_1, .., x_n) = V\left(x_1^{i_1} e_{i_1}, .., x_n^{i_n} e_{i_n}\right) = x_1^{i_n} \cdot .. \cdot x_n^{i_n} \underbrace{V(e_{i_1}, .., e_{i_n})}_{0 \text{ für } i_k = i_l \ , \ k \neq l} = \sum_{\mathcal{P} \in S_n} \chi(\mathcal{P}) x_1^{\mathcal{P}(1)} \cdot .. \cdot x_n^{\mathcal{P}(n)} \underbrace{V(e_1, .., e_n)}_{1} = \det\left(x_i^j\right)$$

□

1.1.4 Beispiel: Die Volumenform im $\mathbb{R}^3$

Betrachten den Euklidischen Raum $(\mathbb{R}^3, g)$, das heißt $g\left(\partial_{x^i}, \partial_{x^j}\right) = \delta_{ij}$, wobei die $\partial_{x^i}, \; i = 1, .., 3$ schon eine [semi-]Orthonormalbasis bilden. Für Vektoren $x_1, .., x_3$ folgt dann nach Satz 1.1.3

$$V(x_1, x_2, x_3) = \det(x_i^j)_{i,j=1}^3 \cong \underbrace{x_1 \cdot (x_2 \times x_3)}_{\text{Spatprodukt}}$$

was genau dem Volumen des von den Vektoren x_1, x_2, x_3 aufgespannten Parallelepipeds entspricht.

1.2 Die äußere Ableitung

1.2.1 Definition: Äußere Ableitung

Für eine p-Differentialform F auf einer n-dimensionalen $\mathcal{C}^\infty$ Mannigfaltigkeit M ist die *äußere Ableitung* dF von F definiert gemäß

$$dF = \frac{1}{p!} \frac{\partial F_{i_1 .. i_p}}{\partial u^{i_0}} du^{i_0} \wedge .. \wedge du^{i_p} \;\; \in \Lambda^{p+1} M$$

wobei die Kovektorfelder $du^j, \; j = 1, .., n$ die Dualbasis zu den Vektorfeldern $\dfrac{\partial}{\partial u^j}$ darstellen.

1.2.2 Lemma: Eigenschaften der äußeren Ableitung

1. Für eine p-Differentialform F und Vektorfeldern $X_0,..,X_p$ gilt

$$dF(X_0,..,X_p) = \sum_{r=0}^{p}(-1)^r X_r F\left(X_0,..,X_{r-1},X_{r+1},..,X_p\right)$$

$$+ \sum_{0\le r<s\le p}(-1)^{r+s} F\left([X_r,X_s]\,,X_0,..,X_{r-1},X_{r+1},..,X_{s-1},..,X_{s+1},..,X_p\right)$$

2. Speziell für skalare Felder (0-Formen) auf M ist

$$dF = \frac{\partial F}{\partial u^i} du^i$$

3. Für eine p-Differentialform F gilt stets $d(dF) = 0$, das heißt $d \circ d = 0$.

1.2.3 Analogie zum $\mathbb{R}^n$

Betrachten die Mannigfaltigkeit $M := \mathbb{R}^n$ ausgestattet mit der Euklidischen Metrik g zusammen mit den kartesischen Koordinatenvektoren ∂_{x^i} und den dazu dualen dx^i.

- Sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ein skalares Feld auf M. Interpretiert man F als 0-Form, so ist die äußere Ableitung

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x^i} dx^i$$

  die 1-Form, die auf Vektorfelder gemäß

$$dF(X) = \frac{\partial F}{\partial x^i} X^i = g\left(\frac{\partial F}{\partial x^i}\partial_{x^i}, X\right) = (J\,\mathrm{grad}\,F)(X)$$

  wirkt. dF kann also als die auf natürlicher Weise zum Gradienten $\mathrm{grad}\,F$ gehörige 1-Form interpretiert werden (vgl. totales Differential).

- Betrachten nun das Vektorfeld $F = F^i\partial_{x^i} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Interpretiert man F als 1-Form JF, gemäß

$$JF(X) = g(F,X) = F^i X^j \underbrace{g_{ij}}_{\delta_{ij}} = F^i X^i \;\rightsquigarrow\; JF = F^i dx^i$$

  so entspricht die äußere Ableitung dJF genau der 2-Form

$$dJF = \frac{\partial F^i}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^i$$

  Diese wirk auf Vektorfelder X, Y gemäß

$$dJF(X,Y) = \frac{\partial F^i}{\partial x^j}(X^iY^j - X^jY^i) = \frac{\partial F^i}{\partial u^j} X^l Y^r \left[\delta_{jl}\delta_{ir} - \delta_{jr}\delta_{il}\right] = \frac{\partial F^i}{\partial u^j} X^l Y^r \varepsilon_{jik}\varepsilon_{lrk}$$

$$= g\left(\frac{\partial F^i}{\partial u^j}\varepsilon_{jis}\partial_{u^s},\; X^lY^r\varepsilon_{lrk}\partial_{u^k}\right) = g\left(\mathrm{rot}\,F,\; X\times Y\right)$$

- Ist ferner $F = \mathrm{grad}\,f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Gradientenfeld, so folgt aus

$$d(JF) \cong d(df) = 0$$

  dass $g\left(\mathrm{rot}\,F, X\times Y\right)$ für alle X, Y verschwindet, was nur geht wenn $\mathrm{rot}\,F = 0$ ist. Dies bestätigt die bekannte Tatsache $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,f = 0$.

2 Integration

2.1 Einführung

Hinsichtlich der Tatsache, dass abstrakte $\mathbb{C}^\infty$ Mannigfaltigkeiten eine Verallgemeinerung von im $\mathbb{R}^n$ eingebetteten Mannigfaltigkeiten darstellen, wünscht man dass dies auch für die Integration gilt. Mit Hilfe der Karte wird das abstrakte Integral auf Mannigfaltigkeiten auf das bekannte (gegebenfalls mehrdimensionale) Lebesque-Integral zurückgeführt, wobei der metrische Tensor g die notwendige Übermittlung der Topologie zu Nutzen hat.
Man unterscheidet zwischen zwei Arten von Integralen:

1. **Integral 1. Art:** Integration einer skalaren, glatten Funktion $h \in \mathcal{F}(M)$ über die gesamte Mannigfaltigkeit. Die dabei benötigte *Gewichtung* der Funktion entlang der Mannigfaltigkeit wird durch die so genannte Volumenform V beschrieben.

2. **Integral 2. Art:** Integration einer n-Form über die gesamte Mannigfaltigkeit. Stellt eine Verallgemeinerung des Integrals über Vektorfelder dar. Beispielsweise geht für $n = 2$ bei der Integration eines Vektorfeldes $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ über eine 2-dimensionale, parametrisierten Fläche $\mathcal{E} = f(U) \subset \mathbb{R}^3$, der Integrant
$$F \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \times \frac{\partial f}{\partial x^j} \right)$$
in die 2-Form
$$F(\partial_i, \partial_j) := g\left(F, \partial_i f \times \partial_j f\right)$$
über.

2.1.1 Vorgehensweise

Zunächst wird eine n-dimensionale $\mathcal{C}^\infty$ semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) betrachtet, die komplett durch die Karte φ beschrieben sei. Nach Definition des Integrals 2. Art auf solch eine (eigentlich selten auftretende Mannigfaltigkeit), wird dieser Begriff erweitert auf den Fall dass mehrere Karten $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ benötigt werden um M zu beschreiben. Schließlich wird das Integral 1. Art auf den Integralbegriff 2. Art zurückgeführt.

2.2 Integration 2. Art

Es sei M eine n-dimensionale $\mathcal{C}^\infty$ Mannigfaltigkeit, die komplett durch die (positiv orientierte) Karte φ beschrieben sei.

2.2.1 Definition: Integral 2. Art

Für n-Form F auf M, definiert man
$$\int_M F := \underbrace{\int_{\varphi(M)} F_{(\varphi^{-1}(u))}(\partial_1, .., \partial_n)\; du_1 \dots du_n}_{\text{Klassisches Lebesque Integral}}$$

Bemerke: Für die Formulierung des Integrationsbegriffs 2. Art wird keine Metrik vorausgesetzt. Die gesamte Information über die lokale Topologie wird der n-Form F überlassen.

2.2.2 Satz: Unabhängigkeit des Integrals von der Karte

Es sei $F \in \Lambda^n M$ eine n-Form auf M. Dann ist das Integral $\int_M F$ unabhängig von der Wahl der Karte.

Beweis: Es seien φ, ζ zwei positiv orientierte Karten mit jeweils den Koordinaten u^i, v^j. Dann gilt
$$F(\varphi^{-1}(u))\left(\frac{\partial}{\partial u^1}, .., \frac{\partial}{\partial u^n}\right) = F(\varphi^{-1}(u))\left(\frac{\partial v^{j_1}}{\partial u^1}\frac{\partial}{\partial v^{j_1}}, .., \frac{\partial v^{j_n}}{\partial u^n}\frac{\partial}{\partial v^{j_n}}\right) = \frac{\partial v^{j_1}}{\partial u^1} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial v^{j_n}}{\partial u^n} \cdot \underbrace{F(\varphi^{-1}(u))\left(\frac{\partial}{\partial v^{j_1}}, ..., \frac{\partial}{\partial v^{j_n}}\right)}_{0 \text{ für } j_k = j_l,\ k \neq l}$$

$$= \sum_{\mathcal{P} \in S_n} \frac{\partial v^{\mathcal{P}(1)}}{\partial u^1} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial v^{\mathcal{P}(n)}}{\partial u^n} \cdot \underbrace{F(\varphi^{-1}(u))\left(\frac{\partial}{\partial v^{\mathcal{P}(1)}}, ..., \frac{\partial}{\partial v^{\mathcal{P}(n)}}\right)}_{\chi(\mathcal{P}) F(\varphi^{-1}(u))\left(\frac{\partial}{\partial v^1}, ..., \frac{\partial}{\partial v^n}\right)} = F(\varphi^{-1}(u))\left(\frac{\partial}{\partial v^1}, ..., \frac{\partial}{\partial v^n}\right) \underbrace{\sum_{\mathcal{P} \in S_n} \chi(\mathcal{P}) \frac{\partial v^{\mathcal{P}(1)}}{\partial u^1} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial v^{\mathcal{P}(n)}}{\partial u^n}}_{\det\left(\frac{\partial v^j}{\partial u^i}\right)}$$

Durch

$$\frac{\partial}{\partial u^i} = \underbrace{\frac{\partial v^j}{\partial u^i}}_{\substack{\text{Umrechnungs-}\\ \text{matrix}}} \cdot \frac{\partial}{\partial v^j}$$

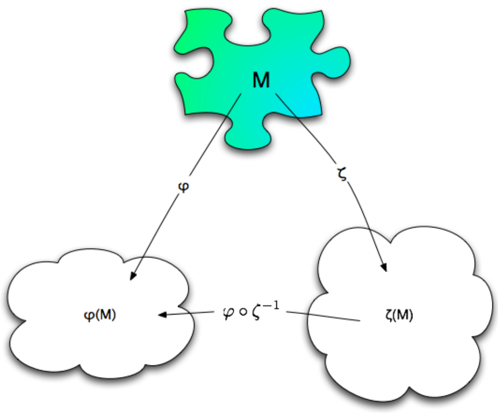
und der Tatsache dass $\frac{\partial}{\partial u^i}$ und $\frac{\partial}{\partial v^j}$ gleichorientiert sind, ist klar

$$\det \underbrace{\left(\frac{\partial v^j}{\partial u^i}\right)}_{(\zeta\circ\varphi^{-1})'} > 0$$

Somit ist nach voriger Rechnung

$$F(\varphi^{-1}(u))\left(\frac{\partial}{\partial u^1},..,\frac{\partial}{\partial u^n}\right) = F(\varphi^{-1}(u))\left(\frac{\partial}{\partial v^1},...,\frac{\partial}{\partial v^n}\right)\cdot\left|\det\left(\zeta\circ\varphi^{-1}\right)'\right| \tag{1}$$

Betrachten nun den Diffeomorphismus $\varphi\circ\zeta^{-1}$.



Nach der Umrechnungsformel des Lebesque-Integrals gilt dann

$$\int\limits_{\varphi(M)} F(\varphi^{-1}(u))\left(\frac{\partial}{\partial u^1},..,\frac{\partial}{\partial u^n}\right)\,du^1..du^n = \int\limits_{(\varphi\circ\zeta^{-1})^{-1}(\varphi(M))} F\left[\varphi^{-1}\left(\varphi\circ\zeta^{-1}(u)\right)\right]\left(\frac{\partial}{\partial u^1},...,\frac{\partial}{\partial u^n}\right)\cdot\left|\det\left((\varphi\circ\zeta^{-1})'\right)\right|\,dv_1...dv_n$$

$$\overset{(1)}{=} \int\limits_{\zeta(M)} F\left[\zeta^{-1}(u)\right]\left(\frac{\partial}{\partial v^1},...,\frac{\partial}{\partial v^n}\right)\cdot\left|\underbrace{\det\left(\zeta\circ\varphi^{-1}\right)'\cdot\det\left(\varphi\circ\zeta^{-1}\right)'}_{\substack{\det\left[(\zeta\circ\varphi^{-1})'\circ(\varphi\circ\zeta^{-1})'\right]\\ =\det\left[(\zeta\circ\varphi^{-1})'\circ\left(\left(\zeta\circ\varphi^{-1}\right)^{-1}\right)'\right]\\ =\det\left[(\zeta\circ\varphi^{-1})'\circ\left((\zeta\circ\varphi^{-1})'\right)^{-1}\right]\\ =\det(\mathrm{Id})=1}}\right|\,dv_1...dv_n = \int\limits_{\zeta(M)} F\left[\zeta^{-1}(u)\right]\left(\frac{\partial}{\partial v^1},...,\frac{\partial}{\partial v^n}\right)\,dv_1...dv_n$$

□

2.3 Zerlegung der Eins

Es ist nun für eine n-dimensionale $\mathcal{C}^\infty$ Mannigfaltigkeit M mit den Karten $(U_\alpha,\varphi_\alpha)_{\alpha\in A}$ das Integral

$$\int\limits_{U_\alpha} F\ ,\ \alpha\in A$$

für eine n-Form F erklärt. Ziel ist es nun diesen Integralbegriff auf die gesamte Mannigfaltigkeit zu übertragen.

2.3.1 Definition: Zerlegung der Eins

Es sei $\{U_i\}_{i\in I}$ eine offene Überdeckung der Mannigfaltigkeit M. Dann ist eine Familie stetiger Funktionen

$$\{\rho_j\}_{j\in J}\ ,\ \rho_j : M \to\ [0,1]$$

eine *Zerlegung der Eins* falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

- Für $j \in J$ gilt $\operatorname{supp}\rho_j \subset U_{\alpha_j}$ für ein geeignetes $\alpha_j \in I$.
- Für einen Punkt $p \in M$ existiert ein $\beta_p \in I$ so dass $p \in U_{\beta_p}$ und $\left\{j \in J : \operatorname{supp}\rho_j \cap U_{\beta_p} \neq \emptyset\right\} \subset J$ eine endliche Menge ist.
- An jedem Punkt $p \in M$ gilt
$$\sum_{j\in J}\rho_j(p) = 1$$

2.3.2 Beispiel für eine Zerlegung der Eins

Betrachten die reelle Achse $M := \mathbb{R}$ mit der offenen Überdeckung

$$\{I_a := (a-2, a+2)\}_{a\in\mathbb{Z}}$$

und die Familie stetiger Funktionen

$$\{f_a\}_{a\in\mathbb{Z}}\ ,\ f_a : \mathbb{R} \to [0,1]\ ,\ f_a(x) := \begin{cases} x-a+1 & : x \in [a-1,a) \\ 1+a-x & : x \in [a,a+1) \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

illustriert in Abbildung 2.

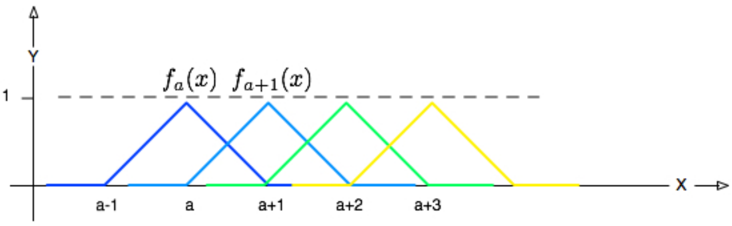


Abbildung 1: Zur stetigen Zerlegung der Eins

Aus der Graphik ist abzulesen:

- Es ist tatsächlich
$$\sum_{a\in\mathbb{Z}} f_a(x) = 1 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$
- Für jedes $a \in \mathbb{Z}$ ist $\operatorname{supp} f_a = [a-1, a+1] \subset I_a$
- Zu jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ existiert ein $a \in \mathbb{Z}$ mit $a-1 < x < a+1$ das heißt $x \in I_a$. Ferner ist
$$\{b \in \mathbb{Z} : \operatorname{supp} f_b \cap I_a \neq \emptyset\} = \{a-2, a-1, a, a+1, a+2\} : \text{endlich}$$

Somit ist $\{f_a\}_{a\in\mathbb{Z}}$ tatsächlich eine Zerlegung der Eins (bzgl. der Überdeckung $\{I_a\}_{a\in\mathbb{Z}}$)

2.3.3 Bemerkung zur Zerlegung der Eins

Alternativ kann man von einer Zerlegung der Eins $(U_i, \rho_j)_{i \in I, j \in J}$ fordern dass die Funktionen ρ_j glatt sind. Dies ermöglicht zwar Operationen und Definitionen die bei einer nicht-glatten Zerlegung der Eins unmöglich sind, stellt jedoch eine erhebliche Hürde bei deren Konstruktion dar.

Schon für die reelle Achse stößt man bei der Konstruktion einer glatte Zerlegung der Eins auf erhebliche Schwierigkeiten. Besteht z.B die Überdeckung aus den Intervallen $(n-2, n+2),\ n \in \mathbb{Z}$ so müssen die ρ_j jeweils einen beschränkten Träger besitzen. Doch nach dem Identitätssatz über analytische Funktionen (vgl. Funktionentheorie) kann keine nicht-konstante analytische Funktion einen beschränkten Träger besitzen, was schonmal eine starke Einschränkung an die ρ_j darstellt.

2.3.4 Beispiel: Glatte Zerlegung der Eins auf der reellen Achse

Es sei

$$\{I_n := (n-2, n+2)\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

eine offene Überdeckung von $\mathbb{R}$, zu der eine glatte Zerlegung der Eins zu konstruieren ist.

- Betrachten die Familie von Funktionen

$$f_q(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-(x-q)^2}} & : |x-q| < 1 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases} \quad ,\ x \in \mathbb{R},\ q \in \mathbb{R}$$

  Dann ist für jedes $q \in \mathbb{R}$ die Abbildung $f_q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ glatt.
  Beweis: o.B.d.A setzen wir $q = 0$. Im Intervall $(-1, 1)$ gilt für f_0:

$$f_0^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1-x^2)^{2^n}} \cdot f_0(x) \tag{2}$$

  für ein geeignetes Polynom P_n, denn: Für $n = 0$ ist die Aussage klar, und für $n+1$ gilt unter Annahme von (2) :

$$f_0^{(n+1)}(x) \overset{(2)}{=} \frac{1}{[(1-x^2)^{2^n}]^2} \cdot \overbrace{\left[P_n'(x)(1-x^2)^{2^n} + 2xP_n(x)2^n(1-x^2)^{2^n-1}\right]}^{\text{Polynom } Q} \cdot f(x) + \frac{P_n(x)}{(1-x^2)^{2^n}} \cdot f_0'(x)$$

$$\overset{(2)}{=} \frac{Q}{(1-x^2)^{2^{n+1}}} \cdot f_0(x) + \frac{P_n(x)P_1(x)}{(1-x^2)^{2^n+2}} \cdot f_0(x) = \frac{\overbrace{Q + P_n(x)P_1(x)(1-x^2)^{2^n-2}}^{\text{Polynom } P_{n+1}(x)}}{(1-x^2)^{2^{n+1}}} \cdot f_0(x)$$

  In $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ ist $f \equiv 0$ und somit ohnehin glatt, mit $f_0^{(n)} \equiv 0$.
  Ferner ist $f^{(n)}(1) = 0$, denn: Für $n = 0$ gilt die Aussage per Konstruktion, und für $n > 0$ ergibt sich der Induktionsschritt aus

$$\text{Rechtsableitung:} \quad f_0^{(n+1)}(1) = \lim_{h \to 0^+} \frac{\overbrace{f_0^{(n)}(1+h)}^{0} - \overbrace{f_0^{(n)}(1)}^{0}}{h} = 0$$

$$\text{Linksableitung:} \quad f_0^{(n+1)}(1) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f_0^{(n)}(1+h) - \overbrace{f_0^{(n)}(1)}^{0}}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{P_n(1+h)}{h\,(1-(1+h)^2)^{2^n}} \cdot e^{-\frac{1}{1-(1+h)^2}} = 0$$

  Analog ist auch $f^{(n)}(-1) = 0$, das heißt $f_0 \in \mathcal{C}^\infty$.

- Definieren die Familie von Funktionen

$$\rho_n(x) := \frac{f_n(x)}{\sum\limits_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ \operatorname{supp} f_k \cap I_n \neq \emptyset}} f_k(x)} = \frac{f_n(x)}{\sum\limits_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ f_k(x) \neq 0}} f_k(x)} \quad ,\ n \in \mathbb{Z},\ x \in \mathbb{R} \tag{3}$$

  Diese stellt bzgl. $\{I_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ eine glatte Zerlegung der Eins dar, denn:

(i) Da f_k glatt sind, sind dies natürlich auch ρ_n.

(ii) Für $n \in \mathbb{Z}$ ist $\operatorname{supp} \rho_n = \operatorname{supp} f_n \subset I_n$.

(iii) Für $m \in \mathbb{Z}$ ist $\operatorname{supp} \rho_n \cap I_m \neq \emptyset$ nur für $n \in \{m-2, .., m+2\}$. Insbesondere ist dann die Summe in (3) endlich.

(iv) Für beliebiges $x \in I_m$ gilt

$$\underbrace{\sum_{n\in\mathbb{Z}} \rho_n(x)}_{\substack{\text{endliche Summe}\\ \text{nach (iii)}}} = \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ \rho_n(x)\neq 0}} \rho_n(x) = \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ f_n(x)\neq 0}} \frac{f_n(x)}{\sum\limits_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ f_k(x)\neq 0}} f_k(x)} = 1$$

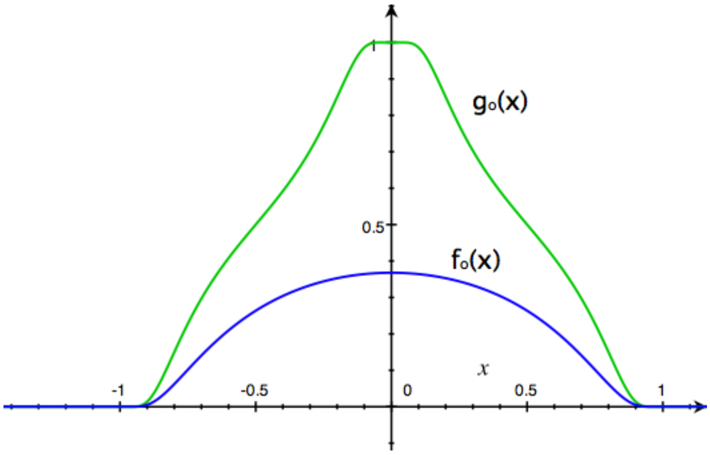


Abbildung 2: Zur glatten Zerlegung der Eins in $\mathbb{R}$

2.3.5 Definition: Integral 2. Art bei Zerlegung der Eins

Es sei nun M eine n-dimensionale $\mathcal{C}^\infty$ Mannigfaltigkeit mit der Überdeckung $\{U_i, \varphi_i\}_{i\in I}$ und der Zerlegung der Eins $\{\rho_j\}_{j\in J}$. Sei ferner F eine n-Form mit kompakten Träger. Dann definiert man

$$\int\limits_M F := \sum_{j\in J} \int\limits_{U_{\alpha_j}} \rho_j F$$

Beispiel: Betrachten die 1-dimensionale Mannigfaltigkeit $M := (0, 10) \subset \mathbb{R}$ mit der offenen Überdeckung $\{I_a \cap M\}_{a=0}^{10}$ und der entsprechenden Zerlegung der Eins $\{f_a \mid_M\}_{a=0}^{10}$ aus Abschnitt 2.3.2 (eingeschränkt auf M). Dabei sei $\varphi_a := \mathrm{Id}$ die zugrundeliegende Karte in jeder Umgebung I_a und F die 1-Form definiert durch

$$F_{(x)} := e^x \underbrace{V}_{dx}$$

Dann ist nach Definition:

$$\int\limits_M F \overset{\text{def.}}{=} \sum_{a=0}^{10} \int\limits_{I_a\cap M} f_a \mid_M F \overset{\text{def.}}{=} \sum_{a=0}^{10} \int\limits_{\mathrm{Id}(I_a\cap M)} f_a \mid_M (\mathrm{Id}^{-1}(x)) F_{(x)}(\partial_x)\ dx = \sum_{a=0}^{10} \int\limits_{I_a\cap M} f_a \mid_M (x) e^x\ dx$$

$$= \sum_{a=1}^{9} \Bigg[\underbrace{\int\limits_{a-1}^{a} (x-a+1)e^x\ dx}_{e^{a-1}} + \underbrace{\int\limits_{a}^{a+1} (a+1-x)e^x\ dx}_{e^{a+1}-2e^a} \Bigg] + \underbrace{\int\limits_{0}^{1} \underbrace{f_0(x)}_{(1-x)} e^x\ dx}_{e-2} + \underbrace{\int\limits_{9}^{10} \underbrace{f_{10}(x)}_{(x-9)} e^x\ dx}_{e^9}$$

$$= -2e^0 + e^1 + \left[e^0 - 2e^1 + e^2\right] + \left[e^1 - 2e^2 + e^3\right] + \left[e^2 - 2e^3 + e^4\right] + \cdots + \left[e^8 - 2e^9 + e^{10}\right] + e^9 = e^{10} - 1$$

was genau dem Ergebnis einer konventionellen Integration von $F(x) := e^x$ über M entspricht! In Abbildung 3 sind die Integranten $\left\{f_a \mid_M F_{(x)}(\partial_x)\right\}_{a=0}^{10}$ dargestellt.

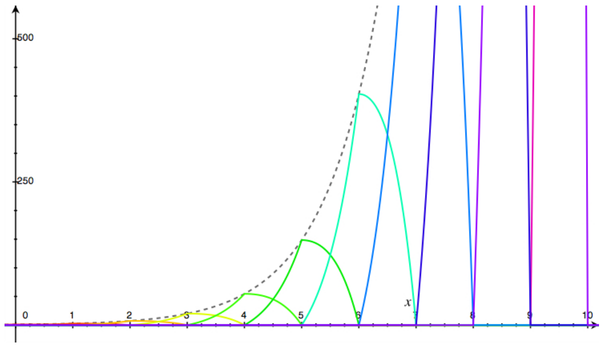


Abbildung 3: Zur Integration über $\mathbb{R}$ mit Zerlegung der Eins

2.3.6 Satz über die Zerlegungsunabhängigkeit

Das Integral $\int\limits_M F$ einer n-Form F auf einer n-dimensionalen $\mathcal{C}^\infty$ Mannigfaltigkeit M ist unabhängig von der Wahl der Zerlegung der Eins.

2.4 Integration 1. Art

Es sei (M, g) eine n-dimensionale $\mathcal{C}^\infty$ semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit, die komplett durch die Karte φ beschrieben sei. Dazu sei durch die zugrundeliegende Metrik g die Volumenform $V \in \Lambda^n M$ definiert.

2.4.1 Definition: Integral 1. Art

Für skalares Feld $h \in \mathcal{F}(M)$ wird definiert

$$\int\limits_M h\ dA := \underbrace{\int\limits_M hV}_{\substack{\text{Integral}\\ \text{2.Art}}} \tag{4}$$

Durch Zurückführung des Begriffs auf das Integral 2. Art, gelten automatisch Satz 2.2.2 und die Verallgemeinerung 2.3.5.

2.4.2 Satz über die Integration 1. Art

Hinsichtlich der Integrale 1. Art auf parametrisierten Flächen im $\mathbb{R}^n$ ist zu erwarten, dass eine zu (4) äquivalente, jedoch auf den metrischen Tensor g basierende (tatsächlich ist die Volumenform V genau durch g definiert), Formulierung existiert. Es gilt tatsächlich:

$$\int\limits_M hV = \int\limits_{\varphi(M)} h(\varphi^{-1}(u))\sqrt{|\det(g(\partial_i, \partial_j))|}\ du^1 \dots du^n$$

Bemerke: Hier wurde o.B.d.A eine komplette Überdeckung (U, φ) von M durch eine Karte φ vorausgesetzt.

Beweis: Es sei $e_1, .., e_n$ eine positiv orientierte semi-Orthonormalbasis und φ eine positiv orientierte Karte. Aus

$$\underbrace{V(\partial_1, .., \partial_n)}_{\substack{>0 \\ \text{da } \varphi \\ \text{positiv orientiert}}} = V\left[\sum_{k_1} g\left(\partial_1, \varepsilon_{k_1} e_{k_1}\right) e_{k_1}, \ldots, \sum_{k_n} g\left(\partial_n, \varepsilon_{k_n} e_{k_n}\right) e_{k_n}\right] = \sum_{k_1,..,k_n} \underbrace{V(e_{k_1}, \ldots, e_{k_n})}_{\substack{\text{Schiefsymmetrisch,} \\ \text{insbesondere}=0 \\ \text{für } k_i = k_j,\ i \neq j}} \prod_i g\left(\partial_i, \varepsilon_{k_i} e_{k_i}\right)$$

$$= \sum_{\mathcal{P} \in S_n} \chi(\mathcal{P}) \prod_i g(\partial_i, \varepsilon_{\mathcal{P}(i)} e_{\mathcal{P}(i)}) = \det\left(g(\partial_i, \varepsilon_j e_j)\right) = \sqrt{\left[\det\left(g(\partial_i, \varepsilon_j e_j)\right)\right]^2} \overset{\substack{g \\ \text{symmetrisch}}}{=} \sqrt{\left|\det\left(g(\partial_i, \varepsilon_j e_j)\right) \cdot \det\left(g(\varepsilon_j e_j, \partial_i)\right)\right|}$$

$$= \sqrt{\left|\det(g(\partial_i, \varepsilon_l e_l))_{i,l=1}^n \cdot \underbrace{\det(g(e_l, e_k))_{l,k=1}^n}_{\pm 1} \cdot \det(g(\varepsilon_k e_k, \partial_j))_{k,j=1}^n\right|} = \sqrt{\left|\det\left\{\sum_{l,k} g(\partial_i, \varepsilon_l e_l) g(e_l, e_k) g(\varepsilon_k e_k, \partial_j)\right\}_{i,j=1}^n\right|}$$

$$= \sqrt{\left|\det\left\{g\left(\sum_l g(\partial_i, \varepsilon_l e_l) e_l, \sum_k g(\partial_j, \varepsilon_k e_k) e_k\right)\right\}\right|} = \sqrt{\left|\det(g(\partial_i, \partial_j))\right|}$$

folgt dann

$$\int_M hV \overset{\text{def}}{=} \int_{\varphi(M)} h(\varphi^{-1}(u)) V(\partial_1, .., \partial_n)\ du_1 \ldots du_n = \int_{\varphi(M)} h(\varphi^{-1}(u)) \sqrt{\left|\det(g(\partial_i, \partial_j))\right|}\ du_1 \ldots du_n$$

2.4.3 Analogie zum $\mathbb{R}^n$

Betrachten die offene, m-dimensionale parametrisierte Fläche $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^n$ mit der stetig differenzierbaren Parametrisierung $\zeta : G \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n,\ 1 \leq m \leq n$. Dann ist das aus der Analysis bekannte m-dimensionale Integral einer stetigen Funktion $h : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ auf $\mathcal{E}$ definiert gemäß

$$\int_{\mathcal{E}} h\ dS \overset{\text{def}}{=} \int_G h(\zeta(u)) \sqrt{\mathrm{gr}(\zeta'(u))}\ du = \int_G h(\zeta(u)) \sqrt{\det\left(\left\langle \frac{\partial \zeta}{\partial u^i}, \frac{\partial \zeta}{\partial u^j} \right\rangle\right)}\ du$$

Durch den Vergleich $\mathcal{E} = M,\ \zeta = \varphi^{-1},\ \partial_i = \dfrac{\partial \zeta}{\partial u^i}$ und der Tatsache dass g genau die Euklidische Metrik darstellt, wird ersichtlich dass Integrale auf Mannigfaltigkeiten tatsächlich eine Verallgemeinerung von älteren Begriffen darstellen.

3 Integration auf berandete Mannigfaltigkeiten

3.1 Berandete Mannigfaltigkeiten

3.1.1 Definition: $\mathbb{R}^n_-$ und topologische Eigenschaften im $\mathbb{R}^n_-$

Nennen

$$\mathbb{R}^n_- := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x^1 \leq 0 \right\}$$

den negativen (bzgl. der 1. Koordinate) Halbraum.
Man nennt eine Menge $G \subset \mathbb{R}^n_-$ *offen in* $\mathbb{R}^n_-$ falls es eine in $\mathbb{R}^n$ offene Menge G^* gibt mit $G = G^* \cap \mathbb{R}^n_-$. Hinsichtlich dieser Festlegung, nennen wir eine, in einer in $\mathbb{R}^n_-$ offenen Menge G definierte, Funktion f *differenzierbar*, falls sie zu einer differenzierbaren Funktion f^* auf einer in $\mathbb{R}^n$ offenen Menge G^* fortgesetzt werden kann. Für eine in $\mathbb{R}^n_-$ offene Menge G schreiben wir

$$\partial G := \left\{ x \in G : x^1 = 0 \right\}$$

und nennen ∂G den *Rand* von G.
Bemerke: Dies ist nicht zu verwechseln mit dem konventionellen, topologischen Begriff des Randes einer Menge.

3.1.2 Definition: Berandete Mannigfaltigkeit

Eine n-dimensionale *berandete Mannigfaltigkeit* ist eine Mannigfaltigkeit M mit Atlas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ so dass die beim Kartenwechsel entstehenden Funktionen $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ $\mathcal{C}^\infty$ Diffeomorphismen im $\mathbb{R}^n_-$ sind.

3.1.3 Definition: Rand einer berandeten Mannigfaltigkeit

Der *Rand* ∂M einer n-dimensionalen berandeten Mannigfaltigkeit M mit dem Atlas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ besteht aus den Punkten $P \in M$ für die gilt $\varphi(P) \in \partial\varphi(U)$ für eine bestimmte Karte (U, φ), $P \in U$. Dabei ist diese Eigenschaft eines Punktes unabhängig von der speziellen Karte.
Die Gesamtheit der Einschränkungen $(U_\alpha \cap \partial M, \varphi_\alpha |_{\partial M})$ der Karten mit $U_\alpha \cap \partial M \neq \emptyset$ bildet einen Atlas für die $(n-1)$ dimensionale Mannigfaltigkeit ∂M.

3.1.4 Definition: Orientierung des Randes

Für einen Punkt $P \in \partial M \cap U$, wobei (U, φ) eine bzgl. der Orientierung von M zulässige Karte ist, sei vereinbart: $\partial_2, \ldots, \partial_n$ hat als Basis von $(\partial M)_P$ die gleiche Orientierung wie $\partial_1, .., \partial_n$ in M.

3.2 Der Integralsatz von Stokes

3.2.1 Der Integralsatz von Stokes

Es sei M eine berandete, n-dimensionale, orientierte Mannigfaltigkeit und F eine $(n-1)$-Differentialform auf M mit kompaktem Träger. Dann gilt:

$$\int\limits_{\partial M} F = \int\limits_M dF$$

Beweis: O.B.d.A nehmen wir an, dass für eine geeignete Karte (U,φ) mit $\varphi(U)$ offen in $\mathbb{R}^n_-$ gilt $\operatorname{supp} F \subset U$. Dann gilt nach Lemma 1.2.2

$$\int_M dF = \int_{(-\infty,0]\times\mathbb{R}^{n-1}} dF(\varphi^{-1}(u))(\partial_1,..,\partial_n)\ du^1...du^n$$

$$\overset{[\partial_l,\partial_k]=0}{=} \sum_{l=1}^n (-1)^{l-1} \int_{(-\infty,0]\times\mathbb{R}^{n-1}} \partial_l F\left(\varphi^{-1}(u)\right)(...,\partial_{l-1},\partial_{l+1},...)\ du^1...du^n$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \underbrace{\left[\int_{-\infty}^0 \partial_1 F\left(\varphi^{-1}(u)\right)(\partial_2,...,\partial_n)\ du^1\right]}_{F(\varphi^{-1}(u))(\partial_2,..,\partial_n)|_{u^1=0}} du^2...du^n$$

$$+\sum_{l=2}^n (-1)^{l-1} \int_{(-\infty,0]\times\mathbb{R}^{n-2}} \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty} \partial_l F\left(\varphi^{-1}(u)\right)(...,\partial_{l-1},\partial_{l+1},...)\ du^l\right]}_{\substack{0\\ \text{da supp}\left(F\circ\varphi^{-1}\right)\text{ kompakt}}} du^1..du^{l-1}\ du^{l+1}..du^n$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} F(\varphi^{-1}(u))\,(\partial_2,..,\partial_n)\Big|_{u^1=0} du^2..du^n = \int_{\partial M} F$$

□

3.2.2 Analogie zum $\mathbb{R}^3$: Der klassische Satz von Stokes

Betrachten eine 2-dimensionale, in den $\mathbb{R}^3$ eingebettete $\mathcal{C}^\infty$ Fläche M mit der glatten Randkurve ∂M und das glatte Vektorfeld $F = F^i\partial_{x^i}$, wobei die ∂_{x^i} die kartesischen Koordinatenvektoren seien. In der Sprache der Differentialformen, ist F eine 1-Form, ausgedrückt durch $JF := g(F,\cdot)$ und der Darstellung

$$JF = F^i dx^i$$

mit der zu $\partial_{u^1},..,\partial_{u^3}$ dualen Basis $dx^1,..,dx^3$. Nun besagt der Satz von Stokes (3.2.1) folgende Gleichheit:

$$\int_{\partial M} F\ d\vec{r} \overset{\text{def}}{=} \int_{\partial M} JF \overset{\text{Stokes}}{=} \int_M dJF = \int_M d\left(F^i dx^i\right) \overset{1.2.1}{=} \int_M \frac{\partial F^i}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^i$$

Der Integrant

$$dJF = \frac{\partial F^i}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^i$$

stellt eine 2-Form dar:

$$dJF(X,Y) = \frac{\partial F^i}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^i(X,Y) = \frac{\partial F^i}{\partial x^j}\left[dx^j(X)dx^i(Y) - dx^i(X)dx^j(Y)\right] = \frac{\partial F^i}{\partial x^j}\left[X^jY^i - X^iY^j\right]$$

$$= \frac{\partial F^i}{\partial x^j} X^l Y^r \left[\delta_{jl}\delta_{ir} - \delta_{jr}\delta_{il}\right] = \frac{\partial F^i}{\partial x^j} X^l Y^r \varepsilon_{jik}\varepsilon_{lrk} = g\left(\frac{\partial F^i}{\partial x^j}\varepsilon_{jis}\partial_{u^s},\ X^lY^r\varepsilon_{lrk}\partial_{u^k}\right) = g\left(\operatorname{rot} F,\ X \times Y\right)$$

Für Karte φ von M mit den Koordinatenvektoren $\partial_{v^1},\partial_{v^2}$ ergebe sich dann genau

$$\int_{\partial M} \vec{F}\ d\vec{r} = \int_{\varphi(M)} \operatorname{rot} F \cdot \partial_{v^1} \times \partial_{v^2}\ dv^1 dv^2 \cong \int_M \operatorname{rot} \vec{F}\ d\vec{A}$$

was dem klassischen Satz von Stokes entspricht.

3.3 Der Gaußsche Satz im $\mathbb{R}^n$

3.3.1 Vorbetrachtung: Das Oberflächenintegral

Betrachtet man eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$, mit dem $(n-1)$-dimensionalen Rand ∂M, über den ein Vektorfeld $f = f^i \partial_{x^i}$ (positiv orientierte, semi-Orthonormalbasis ∂_{x^i}) integriert werden soll, so betrachtet man f als $(n-1)$ -Form $*Jf$ und schreibt

$$\int\limits_{\partial M} \vec{f}\, d\vec{A} \cong \int\limits_{\partial M} *Jf$$

wobei $*$ der Hodge-Stern Operator und $Jf = g(f, \cdot)$ die dem Feld f entsprechende 1-Form ist. Tatsächlich ist für Vektoren $X_1, .., X_{n-1}$

$$* Jf(X_1, .., X_{n-1}) = \sum_i * \left(f^i J \partial_{x^i}\right)(X_1, .., X_{n-1}) = \sum_i \varepsilon_i f^i * dx^i (X_1, .., X_{n-1})$$

$$= \sum_i \varepsilon_i f^i \cdot [\underbrace{*dx^k (X_1, .., X_{n-1}) \partial_{x^k}}_{\substack{\overset{n-1}{\underset{j=1}{\times}} X_j \\ \text{Verallgemeinertes} \\ \text{Kreuzprodukt}}}]^i = g\left(f, \ \overset{n-1}{\underset{j=1}{\times}} X_j\right)$$

so dass für Koordinatenvektoren $\partial_{u^1}, .., \partial_{u^{n-1}}$ auf ∂M gilt:

$$*Jf\left(\partial_{u^1}, .., \partial_{u^{n-1}}\right) du^1 ... du^{n-1} = g\Bigg(f, \ \underbrace{\overset{n-1}{\underset{j=1}{\times}} \partial_{u^j}}_{\substack{\text{Normalenvektor} \\ \text{auf } \partial M}}\Bigg)\, du^1 ... du^{n-1} \cong \left\langle \vec{f}, \ d\vec{A} \right\rangle$$

Beispiel: Speziell für $n = 3$ ist

$$(*Jf)(X, Y) = (f^i * J\partial_{x^i})(X, Y) = (f^1 dx^2 \wedge dx^3 + f^2 dx^3 \wedge dx^1 + f^3 dx^1 \wedge dx^2)(X, Y)$$

$$= f^1(X^2Y^3 - X^3Y^2) + f^2(X^3Y^1 - X^1Y^3) + f^3(X^3Y^2 - X^2Y^3) \cong \langle f, X \times Y \rangle$$

3.3.2 Vorbetrachtung: Die Divergenz

Schreiben

$$d * Jf = d \sum_i f^i * J\partial_{x^i} = d \sum_i (-1)^{i-1} f^i dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \cdots \wedge dx^n$$

$$= \sum_i (-1)^{i-1} \frac{\partial f^i}{\partial x^k} \ \underbrace{dx^k \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \cdots \wedge dx^n}_{\substack{0 \\ \text{für } k \neq i}}$$

$$= \sum_i (-1)^{i-1} \frac{\partial f^i}{\partial x^i} \ \underbrace{dx^i \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \cdots \wedge dx^n}_{(-1)^{i-1} V} = \sum_i \frac{\partial f^i}{\partial x^i} \ V$$

und sehen dass gilt

$$\boxed{d * Jf = \operatorname{div} f \cdot V} \tag{5}$$

3.3.3 Der Gaußsche Satz

Für $(M, g) \subset \mathbb{R}^n$ und Vektorfeld $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, folgt mit dem Satz von Stokes (3.2.1) und den oberen Überlegungen unmittelbar der bekannte Gaußsche Satz

$$\int\limits_{\partial M} \vec{f}\, d\vec{A} \cong \int\limits_{\partial M} *Jf \overset{\text{Stokes}}{=} \int\limits_{M} d * Jf \overset{(5)}{=} \int\limits_{M} \operatorname{div} f \cdot V \cong \int\limits_{M} \operatorname{div} f \ dV$$

3.4 Analogie zum $\mathbb{R}^n$: Geschlossene Integrale über äußere Ableitungen

Es sei M eine berandete n-dimensionale $\mathcal{C}^\infty$ Mannigfaltigkeit und F eine $(n-2)$-Form auf M. Dann gilt:

$$\int\limits_{\partial M} dF = 0$$

Beweis: Mit dem Satz von Stokes folgt direkt

$$\int\limits_{\partial M} dF = \int\limits_{M} \underbrace{d(dF)}_{0} = 0$$

Spezialfall: Für eine (geschlossene) Kurve ∂M als glatter Rand einer 2-dimensionalen Fläche $M \subset \mathbb{R}^m$ und skalarem Feld F (0-Form) bedeutet dies

$$0 = \int\limits_{\partial M} dF = \int\limits_{\partial M} \frac{\partial F}{\partial x^i}\, dx^i \cong \int\limits_{\partial M} \operatorname{grad} F\, d\vec{r}$$

was genau der bekannten Eigenschaft von Gradientenfeldern entspricht.

3.5 Bemerkungen zu berandeten Mannigfaltigkeiten

3.5.1 Definition: Einfach berandete Menge

Eine Menge $\mathfrak{D} \subset \mathbb{R}^n$ heiße *einfach berandet*, falls:

- eine offene Menge $\mathfrak{D}^* \subset \mathbb{R}^n$, $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{D}^*$ und eine in $\mathbb{R}^n_-$ offene Menge $U = U^* \cap \mathbb{R}^n_-$, U^* offen, existiert,
- ein $\mathcal{C}^\infty$ Diffeomorphismus $\Psi : U^* \to \mathfrak{D}^*$ existiert,
- und gilt: $\mathfrak{D} = \Psi(U)$.

Dabei sei $\partial\mathfrak{D} := \Psi(\partial U)$.
Eine Funktion in $\mathfrak{D}$ heiße *differenzierbar*, falls sie zu einer in $\mathfrak{D}^*$ (wobei $\mathfrak{D}^*$ obere Eigenschaften erfülle) differenzierbaren Funktion erweitert werden kann.

Bemerke: Jede in $\mathbb{R}^n_-$ offene Menge $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}^* \cap \mathbb{R}^n_-$ ($\mathfrak{D}^*$ offen) ist einfach berandet.
Beweis: Setze $U := \mathfrak{D}, U^* := \mathfrak{D}^*$ und $\Psi := \mathrm{Id}$.

3.5.2 Definition: Einfach berandete Mannigfaltigkeit

Eine n-dimensionale *einfach berandete Mannigfaltigkeit* sei nun eine Mannigfaltigkeit M mit Atlas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ so dass die beim Kartenwechsel entstehenden Funktionen $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ $\mathcal{C}^\infty$ Diffeomorphismen in einer einfach berandeten Menge $\mathfrak{D}_{\alpha,\beta} \subset \mathbb{R}^n$ sind.

3.5.3 Lemma über einfach berandete Mannigfaltigkeiten

Jede einfach berandete Mannigfaltigkeit ist (gegebenfalls nach Kartenwechsel) eine berandete Mannigfaltigkeit. Der Rand ∂M einer einfach berandeten Mannigfaltigkeit M ist somit entsprechend definiert.

Beweis: Zu $\mathfrak{D}_\alpha := \varphi_\alpha(U_\alpha)$ sei Ψ_α der entsprechende $\mathcal{C}^\infty$ Diffeomorphismus (vgl. Def. 3.5.1). Zu jeder Karte φ_α konstruiere die Karte

$$\varphi^*_\alpha := \Psi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\alpha$$

Somit können alle für berandete Mannigfaltigkeiten geltende (kartenunabhängige) Sätze auch für einfach berandete Mannigfaltigkeiten formuliert werden.
Bemerke: Die Umkehrung der Aussage ist durch die Bemerkung in Def. 3.5.1 gesichert.

4 Rechnerisches Beispiel

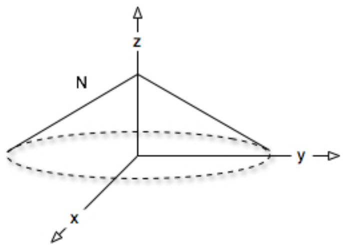
4.1 Einführung

4.1.1 Definition der Mannigfaltigkeit

Betrachten den Diffeomorphismus $f : M := (0,1] \times [0,2\pi) \to \text{image}(f)$ definiert durch

$$f(r,\varphi) := \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 1-r \end{pmatrix}$$

der das Quadrat M auf die Kuppelfläche $N := \text{image}\, f$



abbildet. Dabei sei f^{-1} auch die Karte von N und auf N herrsche die Euklidische Metrik g. Mit

$$\partial_r \cong \partial_r f = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ -1 \end{pmatrix} \ , \ \partial_f \cong \partial_\varphi f = \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

ergibt sich der metrische Tensor bzgl. der Basis $(\partial_r, \partial_\varphi)$ gemäß

$$(g) = \begin{pmatrix} \langle \partial_r f, \partial_r f\rangle & \langle \partial_r f, \partial_\varphi f\rangle \\ \\ \langle \partial_\varphi f, \partial_r f\rangle & \langle \partial_\varphi f, \partial_\varphi f\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

4.1.2 Orthonormalbasis & Dualbasis

Zu erkennen ist:

$$e_r := \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_r \ , \ e_\varphi := \frac{1}{r}\partial_\varphi$$

bilden eine Orthonormalbasis. Die zu e_r, e_φ duale Basis a^r, a^φ ist gegeben durch die Forderung $a^i(e_j) = \delta_{ij}$ bzgl. der Basis $\partial_r, \partial_\varphi$ gemäß

$$(a^r) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ (a^\varphi) = \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix}$$

4.1.3 Die Volumenform

Bekanntlich ergibt sich die Volumenform gemäß

$$V = a^r \wedge a^\varphi = \sum_{\mathcal{P}\in S_2} \chi(\mathcal{P}) a^{\mathcal{P}(1)} \otimes a^{\mathcal{P}(2)} = a^r \otimes a^\varphi - a^\varphi \otimes a^r$$

das heißt für $y_i = y_i^j \partial_i$ ist

$$V(y_1,y_2) = a^r(y_1)\cdot a^\varphi(y_2) - a^\varphi(y_1)\cdot a^r(y_2) = y_1^r \underbrace{a^r(\partial_r)}_{\sqrt{2}} y_2^\varphi \underbrace{a^\varphi(\partial_\varphi)}_{r} - y_1^\varphi a^\varphi(\partial_\varphi) y_2^r a^r(\partial_r) = r\sqrt{2}\,(y_1^r y_2^\varphi - y_1^\varphi y_2^r)$$

4.2 Flächenberechnung

Methode 1

Mit $h \in \mathcal{F}(N),\ h \equiv 1$ ergibt sich

$$\int\limits_N hV = \int\limits_{f^{-1}(N)=M} hV(\partial_r,\partial_\varphi)\ dr\ d\varphi = \int\limits_{(0,1]\times[0,2\pi)} 1\cdot r\sqrt{2}\cdot 1\ dr\ d\varphi = \sqrt{2}\int\limits_{(0,1]} r\ dr \int\limits_{[0,2\pi)} d\varphi = \sqrt{2}\pi$$

Methode 2

Schreiben

$$\int\limits_N hV = \int\limits_{f^{-1}(N)} h\sqrt{|\det g(\partial_i, \partial_j)|}\ dr\ d\varphi = \int\limits_{\mathcal{T}} \underbrace{\sqrt{\left|\det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}\right|}}_{\sqrt{2}r}\ dr\ d\varphi \overset{\text{analog}}{=} \sqrt{2}\pi$$

4.3 Flussberechnung

Gegeben sei das homogene Feld $F = \vec{e}_z \cong \partial_{x^3}$, wofür das Integral $\int\limits_N F\ d\vec{A}$ zu berechnen sei.

Methode 1

Nach Abschnitt 3.3 ist

$$\int\limits_N F\ d\vec{A} \cong \int\limits_N *JF = \int\limits_N *F^i dx^i = \int\limits_N *dx^3 = \int\limits_N dx^1 \wedge dx^2 = \int\limits_N \left[dx^1 \otimes dx^2 - dx^2 \oplus dx^1\right]$$

$$= \int\limits_M \left[dx^1 \otimes dx^2 - dx^2 \oplus dx^1\right] (\partial_r, \partial_\varphi)\ dr\ d\varphi = \int\limits_M [\cos\varphi \cdot r\cos\varphi - \sin\varphi \cdot (-r\sin\varphi)]\ dr\ d\varphi = \int\limits_M r\ dr\ d\varphi = \pi$$

Methode 2

Identifizieren F mit der 2-Form

$$F(X, Y) = F \cdot (X \times Y)$$

so dass direkt folgt

$$\int\limits_N F \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{f^{-1}(N)=M} F(\partial_r, \partial_\varphi)\ dr\ d\varphi = \int\limits_M \vec{e}_z \cdot (\partial_r \times \partial_\varphi)\ dr\ d\varphi = \int\limits_M r\ dr\ d\varphi = \pi$$

Literatur

[1] *Geometrie der Raumzeit*, Rainer Oloff
Vieweg, Wiesbaden 2004

[2] *Differentialgeometrie und Minimalflächen*, J. Hinrich, J. Jürgen
Springer, Berlin 2007

[3] *Elemente der Analysis auf Mannigfaltigkeiten*, O. Kowalski
Teubner, Leibzig 1981