Übungen zur Analysis III   WS 08/09

14. Serie

1. Ein **Skalarprodukt** auf einem reellen linearen Raum H ordnet dem Paar von Elementen x und y die relle Zahl (x, y) zu. Dabei soll gelten

$$\begin{aligned}&(x,y) = (y,x)\\&(\lambda x + \mu y, z) = \lambda(x,z) + \mu(y,z) \quad \text{für Zahlen } \lambda, \mu\\&(x,x) > 0 \quad \text{für } x \neq 0\end{aligned}$$

Ein **Prä-Hilbert-Raum** ist ein linearer Raum mit Skalarprodukt.
Zeigen Sie

a) $|(x,y)|^2 \leq (x,x)(y,y)$ (Cauchy-Schwarz-Ungleichung)

b) $\sqrt{(x+y,\ x+y)} \leq \sqrt{(x,x)} + \sqrt{(y,y)}$

2.* [3 P.] Ein Prä-Hilbertraum ist normiert mit $\|x\| := \sqrt{(x,x)}$. Ein **Hilbert-Raum** ist ein vollständiger Prä-Hilbert-Raum. Bestätigen Sie für einen Hilbert-Raum die Parallelogrammgleichung

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) .$$

3.* [3 P.] Zeigen Sie, dass aus $x_n \to x$ und $y_n \to y$ folgt $(x_n, y_n) \to (x, y)$.

4.* [2 P.] Zwei Elemente x und y eines Hilbert-Raumes sind zueinander **orthogonal**, wenn $(x,y) = 0$.
Zeigen Sie für orthogonale x, y die Gleichung von Pythagoras $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

5. Es sei M ein abgeschlossener Unterraum von H und $x \in H \setminus M$.
Zeigen Sie, dass für $y_0 \in M$ die Aussagen

(1) $(x - y_0, y) = 0 \quad \forall y \in M$

(2) $\|x - y_0\| \leq \|x - y\| \quad \forall y \in M$

äquivalent sind. Wenn diese Eigenschaften erfüllt sind, heißt y_0 **beste Approximation** von x in M.

6. Zeigen Sie, dass jedes $x \in H \setminus M$ genau eine beste **Approximation** in M hat.

Hinweis: Verwenden Sie beim Existenzbeweis die Parallelogrammgleichung.

Zu den mit * gekennzeichneten Aufgaben sind schriftliche Lösungen anzufertigen und in der Woche vom **02.02. - 06.02.** in den Übungen abzugeben.