Übungen zur Analysis III WS 08/09

13. Serie

1. Lösen Sie das Cauchy-Problem für die inhomogene Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} &u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t) \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ &u(x,0) = 0 \ . \end{aligned}$$

2. Berechnen Sie die stationäre Temperaturverteilung einer Kugel, die zur Hälfte in Eiswasser eingetaucht ist, d.h. lösen Sie

$$\begin{aligned} &\Delta u = 0 \ \text{ in } \ K_R(0) \\ &\text{mit } \ u(R,\varphi,\vartheta) = \begin{cases} T & 0 \le \vartheta < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} \le \vartheta \le \pi \end{cases} \end{aligned} \quad .$$

Hinweis: Verwenden Sie o.B. $P'_{n+1} - P'_{n-1} = (2n+1)P_n$.

3. Lösen Sie das Dirichlet-Problem für die Hohlkugel, d.h.

$$\Delta u = 0 \ \text{ in } \ K_{a,b} = \{x : a < |x| < b\}$$

$$u|_{r=a} = f_1(\vartheta) \ , \quad u|_{r=b} = f_2(\vartheta)$$

4.* **[3 P.+ 3 P.]** Lösen Sie die folgenden Cauchy-Probleme für die eindimensionale Wellengleichung

$$\begin{aligned} &u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t) \\ &u(x,0) = u_t(x,0) = 0 \end{aligned}$$

wobei

a) $f(x,t) = \sin \omega x$

b) $f(x,t) = \sin \omega t$

5.* **[2 P. + 2 P.]** Lösen Sie das Cauchy-Problem für die homogene Wellengleichung $u_{tt} = \Delta u$ in $\mathbb{R}^2$, wenn

a) $u(x,0) = e^{x_1} \cos x_2 \qquad u_t(x,0) = x_1^2 - x_2^2$

b) $u(x,0) = x_1^2 + x_2^2 \qquad u_t(x,0) = 1$

Zu den mit * gekennzeichneten Aufgaben sind schriftliche Lösungen anzufertigen und in der Woche vom **26.01. - 30.01.** in den Übungen abzugeben.