

Übungen zur Analysis III WS 08/09

12. Serie

1.* [6 P.] Lösen Sie die Rand-Anfangswert-Aufgabe für die homogene Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad \text{für } (x, y) \in (0, b) \times (0, c)$$

mit der homogenen Randbedingung

$u(x, y, t) = 0$ für $(x, y) \in \partial((0, b) \times (0, c))$ und den Anfangsbedingungen $u(x, y, 0) = f(x, y)$ und $\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = F(x, y)$ durch Separation.

2. Zu gegebener Funktion \mathcal{F} auf $(0, b) \times (0, c) \times (0, \infty)$ sei die Schar von Funktionen v_τ ($\tau > 0$) auf $[0, b] \times [0, c] \times [\tau, \infty)$ definiert durch die Forderungen

$$\frac{\partial^2 v_\tau}{\partial t^2}(x, y, t) = a^2 \left(\frac{\partial^2 v_\tau}{\partial x^2}(x, y, t) + \frac{\partial^2 v_\tau}{\partial y^2}(x, y, t) \right),$$

$$v_\tau(x, y, t) = 0 \quad \text{für } (x, y) \in \partial((0, b) \times (0, c)) \quad \text{und } t \geq \tau,$$

$$v_\tau(x, y, \tau) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial v_\tau}{\partial t}(x, y, \tau) = \mathcal{F}(x, y, \tau).$$

Zeigen Sie, dass dann die Funktion

$$u(x, y, t) := \int_0^t v_\tau(x, y, t) d\tau$$

die Rand-Anfangswert-Aufgabe für die inhomogene Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, y, t) = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)(x, y, t) + \mathcal{F}(x, y, t)$$

mit der Randbedingung $u(x, y, t) = 0$ für $(x, y) \in \partial((0, b) \times (0, c))$ und der Anfangsbedingung $u(x, y, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = 0$ erfüllt.

3. Formulieren Sie die Lösung der Rand-Anfangswert-Aufgabe für die inhomogene Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, y, t) = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)(x, y, t) + \mathcal{F}(x, y)$$

mit der Randbedingung $u(x, y, t) = 0$ für $(x, y) \in \partial((0, b) \times (0, c))$ und den Anfangsbedingungen $u(x, y, 0) = f(x, y)$ und $\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = F(x, y)$.

Zu den mit * gekennzeichneten Aufgaben sind schriftliche Lösungen anzufertigen und in der Woche vom **19.01.** - **23.01.** in den Übungen abzugeben.